

摘要

孔隙介質內的流體運動涉及地球科學、生命科學、農業與工程應用等廣泛議題。為了瞭解孔隙介質內流體與氣體移動過程，本研究以孔隙介質排水過程為專題主題，利用自製的微流道模型，研究孔隙介質排水過程如何受到孔隙大小與下方開口大小的影響。此外，我們也利用 Darcy's Law 與 Kozeny-Carman equation，並加入飽和度變化帶來影響的修正，建立描述排水過程的公式。







研究動機

在觀察海綿排水時，發現排水方式竟與一般物體排水情況相比差異極大。不禁好奇其中的原理，上網查找資料後發現水在包括土壤及海綿等等在內的孔隙介質中流動時，會受到毛細力的影響，使得排水時間會與孔隙大小及底部的開口大小有關。於是我們好奇這些因素會如何具體影響排水情況，而因為海綿在操作上比較難定量改變變因，故我們使用自製的微流道模型進行實驗。

研究目的

- 一、探討在不同孔隙大小、相同開口大小下，微流道的排水時間
- 二、探討在不同孔隙大小、相同開口大小下，剩餘水量對時間的關係
- 三、探討在相同孔隙大小、不同開口大小下，微流道的排水時間
- 四、探討在相同孔隙大小、不同開口大小下，剩餘水量對時間的關係
- 五、歸納孔隙大小、開口大小和排水時間的關係式與理論公式的差異

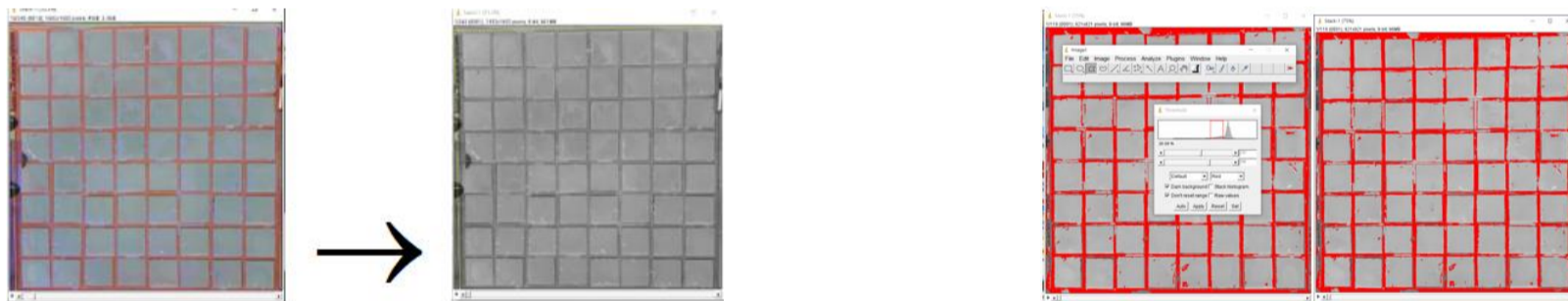
研究設備與器材

					
手機(60 幀拍攝)	自製流道模型 (管徑寬度 1mm、2mm)	防水膠帶	ImageJ 分析實驗影片產出數據	墨水(增加對比, 使軟體更好辨別)	Rhino7 製作自製微流道模型

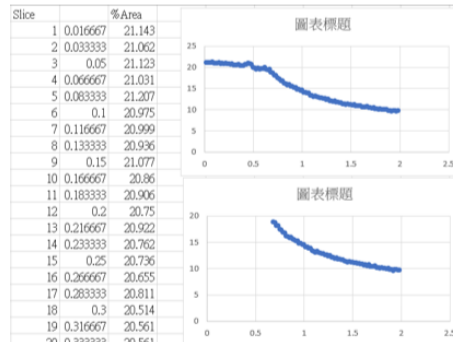
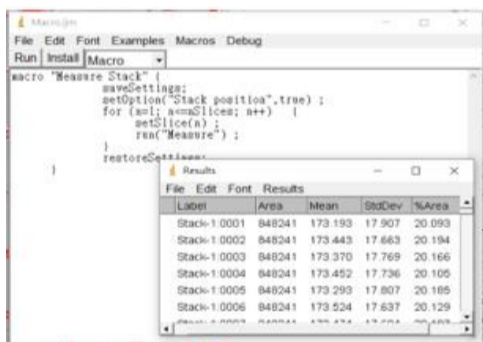
研究過程與方法

數據分析方式

(一) 裁切至需要的範圍，並調整成 8bit 黑白樣式(強化對比)，並利用 threshold 功能，找出染色的水(以紅色標出):



(二) 插入 marco 程式碼，程式自動逐偵分析紅色佔框選面積的比例(其中 %Area 即為所需之數據)，並輸出至 excel，再利用一偵為 1/60 秒即可畫出水佔面積比對時間的圖:



(三) 以排水開始時間的水量為 1，標準化並調整時間軸過後即可得出一組數據。

實驗原理與理論公式

一、對比一般情況下的水流動情形，微流道的管道半徑足夠狹窄，以致水會受到較大的毛細壓力的影響，且因為在排水過程中，越後面排放的水所受到的來自上層水的重力會較小，以致於後期的剩餘水量會趨於穩定，直至水受到的重力與毛細力等受力平衡。

二、假設 Q : 流道每秒的排水量， μ : 水之黏滯係數， A : 流道之截面積， ΔP : 流道之上下壓力差， L : 當時液面的高度，1856 年法國工程師 Henry Darcy 實驗發現的 Darcy's Law，指出了排水通量會受到液體的黏度、截面積等影響，而液體流動的原動力來自於壓力差:

$$Q = \frac{k}{\mu} A \frac{\Delta P}{L}, \text{ 而 Kozeny-Carman equation 指出 } k \text{ 為: } k = \frac{\phi R^2}{8} \frac{L_d^2}{L_T^2} = \frac{\phi R^2}{8\tau}$$

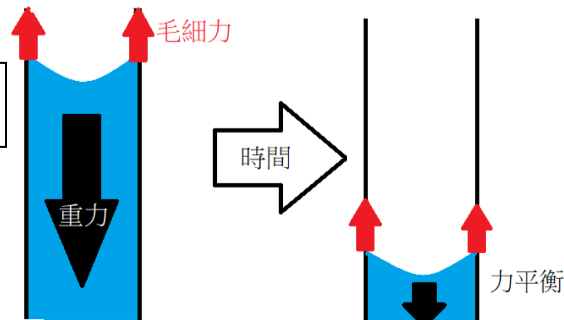
其中 ϕ : 孔隙率、 R : 通道半徑、 L_d : 水的位移、 L_T : 水經過之路徑長，並定義 $\tau = \frac{L_T^2}{L_d^2}$ 且 $\tau = \frac{L_T^2}{L_d^2} \approx 1$

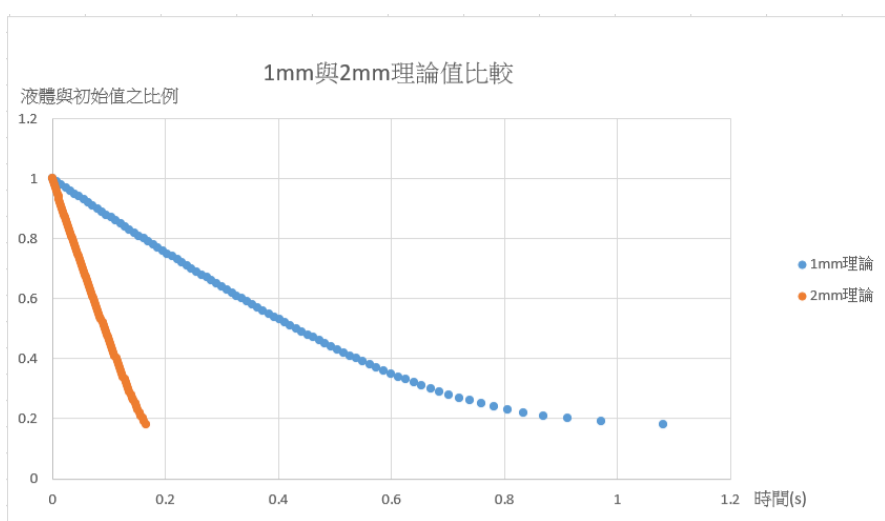
且由於水接近直上直下流動，故假設其孔隙率 $\phi \approx 1$

由於實驗之微流道是以垂直的模式運作，故壓力梯度 $\frac{\Delta P}{L}$: $\frac{\Delta P}{L} = \frac{(P_a + \rho g L - P_c) - P_a}{L} = \frac{\rho g L - P_c}{L}$

其中 P_a : 大氣壓力、 P_c : 毛細壓力、 ρ : 水的密度、 g : 重力加速度。

取 $\frac{Q}{A} = q = \frac{dL}{dt}$ 經過積分推導過後可以得式: $\frac{8\mu}{R^2 \rho g} \left[(L_0 - L) + \frac{P_c}{\rho g} \ln \left(\frac{P_c - \rho g L_0}{P_c - \rho g L} \right) \right] = T$





根據方程式：

當 R (流道孔徑) 變大時，帶入 T 可發現，相同時刻下，孔隙 1mm 之剩餘水量會較孔隙 2mm 的多 (同時刻下 1mm 之 L 較大)。

因為 $P_c = \frac{2\sigma \cos \phi}{r}$ ，而最終剩餘水量高為 $\frac{P_c}{\rho g}$ ，因此孔隙大小 1mm 的最終剩餘水量高會大於 2mm。

研究結果與分析

一、實驗一：孔隙大小與排水時間及剩餘水量的關係

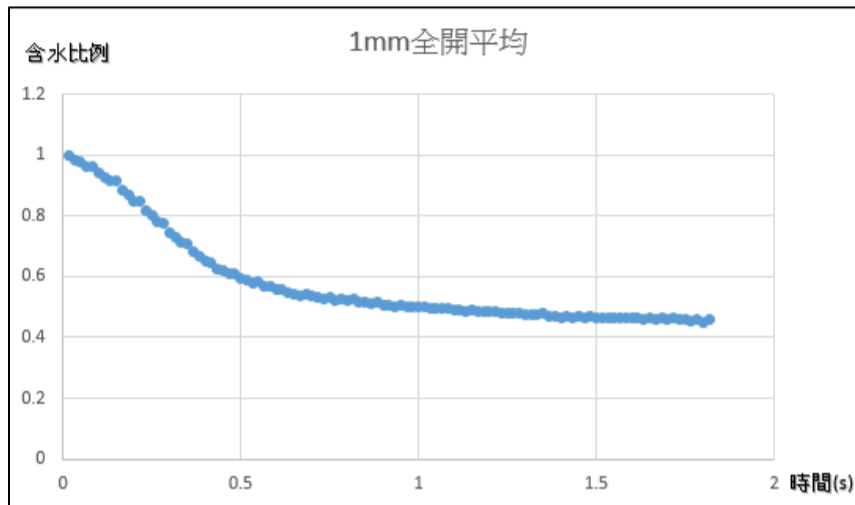


圖 1-(1): 孔隙大小 1mm

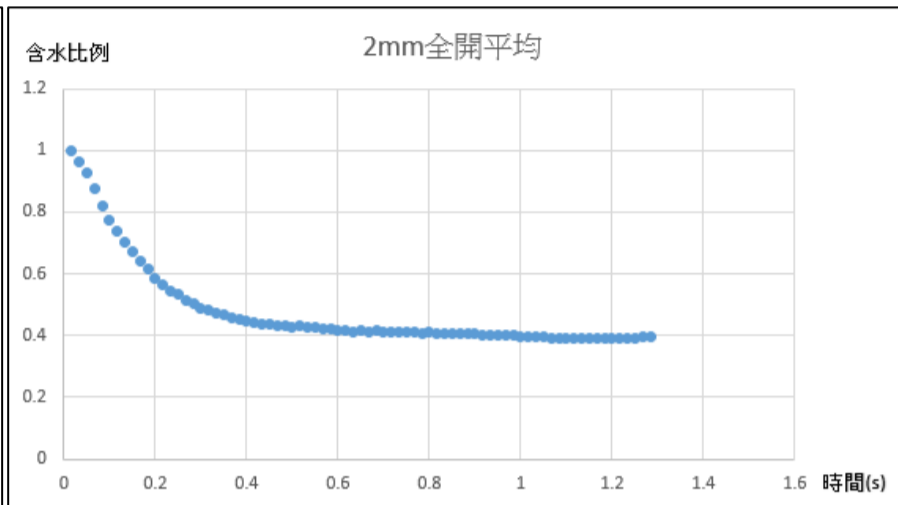


圖 1-(2): 孔隙大小 2mm

圖 1: 底部全開之五組數據平均含水比例與時間之關係。

圖 1-(1) 剩餘水比例大概在 0.4 秒左右有一個較大的趨緩趨勢，而最後剩餘水量大概在五成左右。

圖 1-(2) 剩餘水比例大概在 0.3-0.4 秒左右趨於穩定，而剩餘水量大概在四成左右。

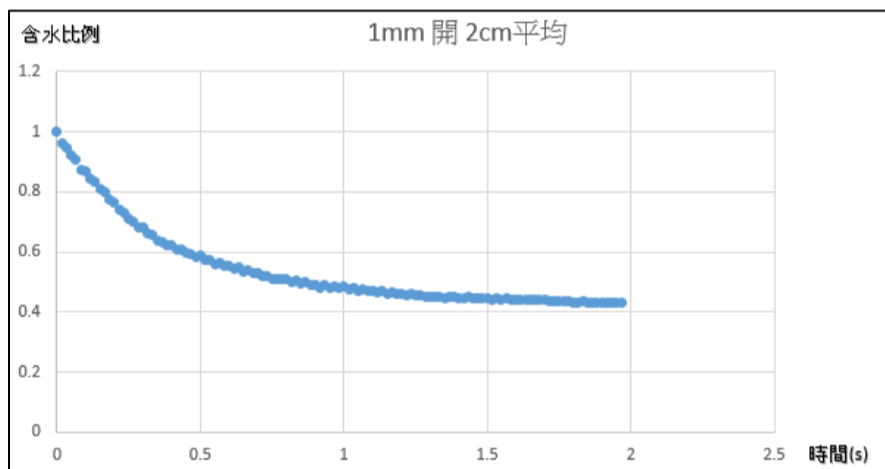


圖 2-(1): 孔隙大小 1mm

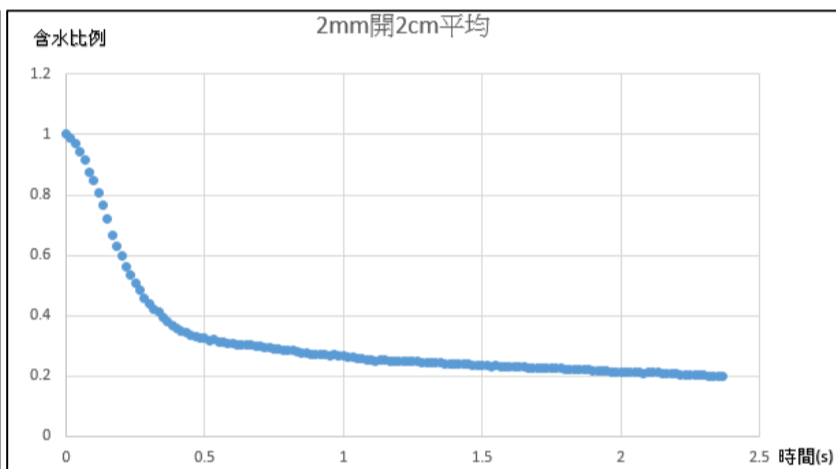


圖 2-(2): 孔隙大小 2mm

圖 2: 底部開 2cm 之五組數據平均含水比例與時間之關係。

圖 2-(1) 剩餘水比例大概在 0.4 秒左右有一個較明顯的趨緩，而最後剩餘水量大概在四成左右。

圖 2-(2) 剩餘水比例大概在 0.3 到 0.4 秒趨緩，而最後剩餘水量大概在兩成左右。

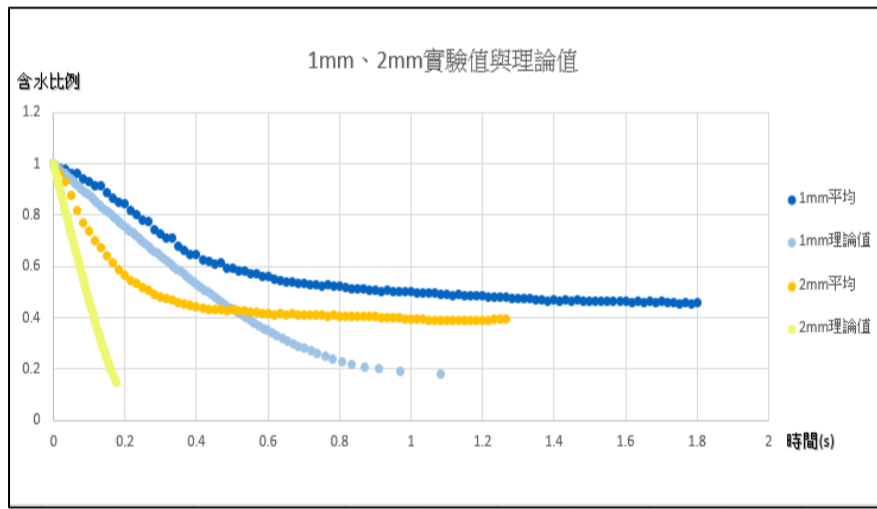


圖 3-(1)

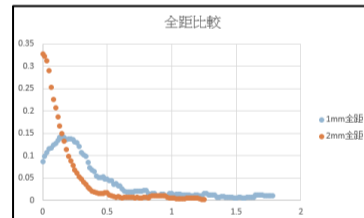


圖 3-(2)

0.5	0.016416	0.8	0.021961		
0.516667	0.012009	2mm	0.816667	0.014915	1mm
0.533333	0.011079		0.833333	0.013006	
0.55	0.007984		0.85	0.014958	
0.566667	0.00661		0.866667	0.014958	
0.583333	0.007926		0.883333	0.010929	
0.6	0.007743		0.9	0.010929	
0.616667	0.005706		0.916667	0.013364	
0.633333	0.007096		0.933333	0.013364	
0.65	0.007096		0.95	0.010252	
			0.966667	0.010252	
結束時間	全距	結束時間	全距		

表 1

圖 3 分析全開時理論值與實驗值的差異，

並定義當某一時間對應之數據與其前後各 4 個數據之全距以及其後時間所對應的全距皆小於 0.015 時為排水結束時間。

二、實驗二：開口大小與排水時間及剩餘水量關係(孔隙大小皆 2mm)

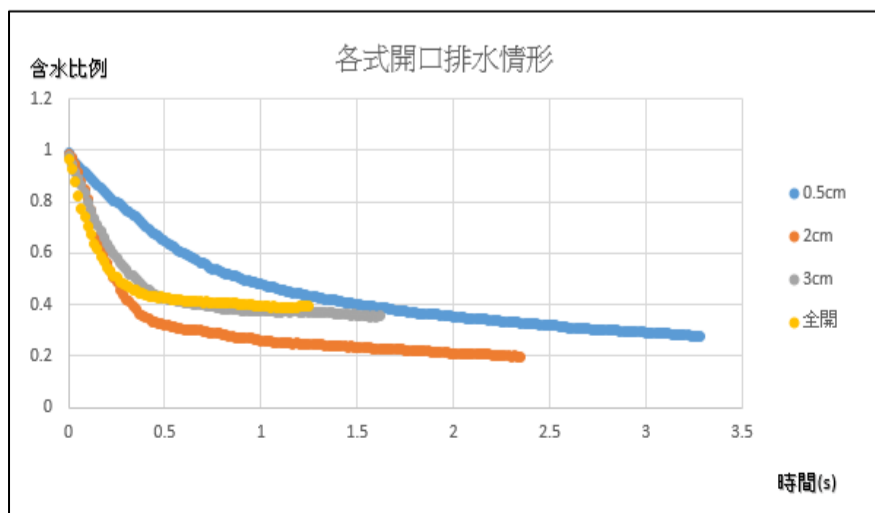


圖 4-(1)

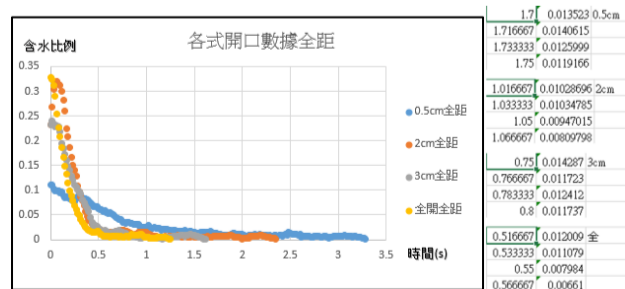


圖 4-(2)

表 2-(1)

0.516667	0.647777	0.318118	0.426358	0.425587	全開(10cm)
0.75	0.546319	0.290473	0.394849	0.409666	3cm
1.016667	0.480165	0.260811	0.376229	0.394976	2cm
1.7	0.380496	0.227994			0.5cm

表 2-(2)

圖 4 分析 2mm 各式開口理論值的差異

結論與討論

一、孔隙大小與排水時間的關係

(一)由表 1 可看出，底部全開情況下之排水時間，1mm (0.8167 秒) 較 2mm (0.5167 秒) 來得長，符合理論。

《結論 1》 孔隙大小越大，其排水時間越短。

二、孔隙大小與剩餘水量對時間的關係

(一) 由圖 1-(1)、(2)可看出，底部全開之 1mm (0.516703) 在結束時間時之含水比例較 2mm(0.425587) 多，符合理論。

(二) 由圖 2-(1)、(2)可看出，底部開 2cm 之 1mm (0.458517) 在結束時間時之含水比例較 2mm(0.302007)多，符合理論。

《結論 2》 孔隙大小越大，其在結束時間時之剩餘水量越少

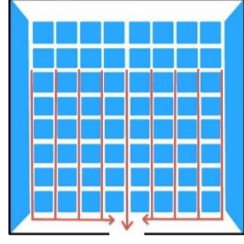


圖 5:開口較小，水向內集中無法同時排水

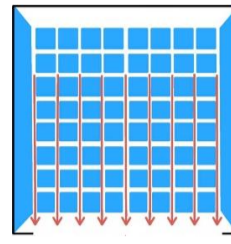


圖 6:開口較大，水直上直下可同時排水

三、微流道底部開口大小與排水時間的關係

(一) 由表 2-(1)可看出，各開口大小的排水時間:0.5cm:1.7s、2cm:1.016667s、3cm:0.75s、全開(10cm):0.51667s。

(二) 根據圖 4 中的趨勢，除了開口大小 0.5cm，其餘的初始排水速度大致相同。

《結論 3》 隨著開口的大小越大，其排水時間越短。

《結論 4》 只要開口未過小或過大，各開口大小初始的排水速度會接近。

四、微流道底部開口大小與剩餘水量對時間的關係

(一)由表 2-(2)可看出，各開口大小的含水比例:0.5cm:0.380496、2cm:0.260811、3cm:0.394849、10cm:0.425587。

發現最終全開(10cm)的含水量最多，而開 2cm 的最少。

《結論 5》 不同開口會有排水結束時含水比例分布不均的現象，尤其是開口 2cm 的殘餘水量特別少，推測會有一個最佳的開口大小或開口大小對流道尺寸的比例，有最少的剩餘水量，此可以做為未來延伸研究的方向。

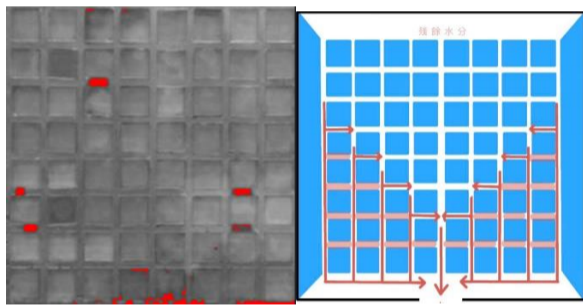


圖 7(左):開口較小時方塊上方橫向部分殘留水分情況與推測流動模式，上方橫向流道內殘存水分較少

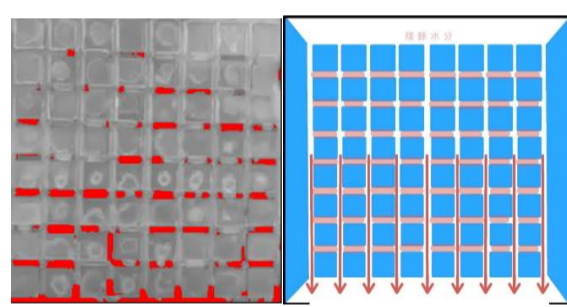


圖 8(右):開口較大時方塊上方橫向部分殘留水分情況與推測流動模式，上方橫向流道內殘存水分較多

五、公式修正

(一)關於 k 值的修正:

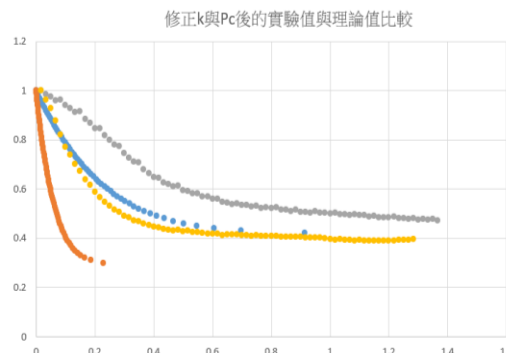
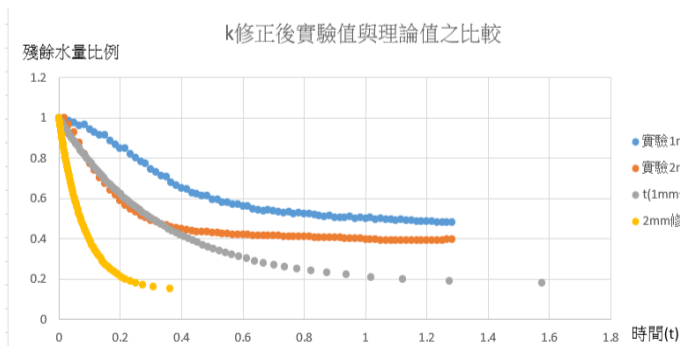
推測在排水過程中，Darcy's Law 中 Kozeny-Carman equation 給出的 k 值原本是預設飽和度不變，因此為定值，而在實驗中隨著排水過程，飽和度會變低，流體流動的區域也會變小，導致 k 值下降而隨著排水量有所變動，因此推測 k 需要乘以 $S = \frac{L}{L_0}$

即: $k = \frac{\phi SR^2 L^2}{8 L_t}$ ，經過積分推導後，會使原公式變為 $\frac{8\mu L_0}{R^2 \rho g} \left[\ln \left(\frac{P_c - \rho g L_0}{P_c - \rho g L} \right) \right] = T$

(二)關於 P_c 的修正:

又考慮到由於主要液體排完後，上部所殘留的液體會以較小的半徑、較大的毛細壓力同時影響已經流下的液體，因此我們推測 $P_c = \frac{2\sigma \cos \phi}{r}$ 的 r 也要修正為 $r' = rS = r \frac{L}{L_0}$ ，也就是說推測 P_c 要修正如下: $P'_c = \frac{P_c}{S} = \frac{P_c L_0}{L}$ ，原式變為: $\frac{4\mu L_0}{R^2 \rho g} \ln \left(\frac{P'_c L_0 - \rho g L_0^2}{P'_c L_0 - \rho g L^2} \right) = T$

並將 2 條修正後的公式帶入 excel:



左圖為修正 k 值，右圖為修正 P_c 與 k

修正公式後始公式變得更簡潔，在時間方面也更加符合理論值

在經過兩次修正後，實驗殘餘水量與公式仍有 10% 左右的誤差。

結論與未來展望

一、孔隙大小越大，其排水時間越短，結束時間時之剩餘水量越少。

二、隨著開口的大小越大，其排水時間越短，且只要開口未過小或過大，各開口大小初始的排水速度會接近。

三、探討一個最佳的開口大小或開口大小對流道尺寸的比例，其最終含水量最少。

四、深入發掘更能符合實驗結果之理論公式。

五、進一步利用不同的孔隙介質的孔隙大小，找到對於一個孔隙介質最優的孔徑大小與下方出口比例的大小，可以作為公園土壤或運動場的排水設計的參考。

參考資料

- 1、Jacob Bear (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. America Elsevier Publishing Company
- 2、F. A. L. Dullien (1979). *Porous Media : Fluid Transport and Pore Structure*. Academic Press. INC.
- 3、J. Kozeny (1927). Ueber kapillare Leitung des Wassers im Boden. *Sitzungsber Akad. Wiss*, 136(2a), 271-306.
- 4、P. C. Carman(1937). Fluid flow through granular beds. *Transactions, Institution of Chemical Engineers*, 15, 150-166.
- 5、P. C. Carman(1956). *Flow of gases through porous media*. Butterworths