

摘要

此研究目的是找出打水漂的最佳入水角度，因此以壓克力板作為模擬水漂的模型，透過Tracker分析壓克力板的質心彈跳高度及運動軌跡，再利用Excel、SciDAVis分析數據，找出其中的運動相關性來驗證理論模擬。透過座標轉換，可以利用這組實驗來模擬打水漂的運動行為，並發現攻角在20度上下時有最佳的彈跳效果，並以此結論來優化打水漂的運動行為。

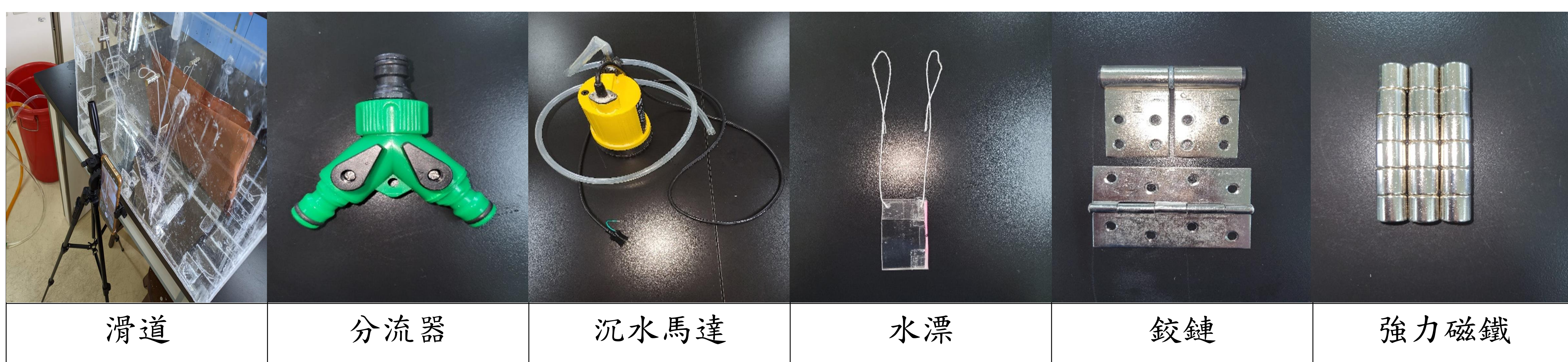
壹、研究動機

在我小的時候，常常與家人在河邊打水漂，對於一顆平平無奇的石頭卻能在水上多次彈跳感到非常奇妙，石頭的重力竟然沒有讓它沉入水底，只要角度抓對，石頭竟然能彈跳起來，同時，石頭的形狀和旋轉程度似乎都是影響水漂彈跳的相關因素，於是我想透過實驗的方法，嘗試解開打水漂的秘密，也希望藉此學習更多流體力學的知識。

貳、研究目的

- 一、探討不同流速對於壓克力板彈跳之影響
- 二、探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響
- 三、分析壓克力板的最佳彈跳攻角
- 四、探討不同接觸面形狀對於壓克力板彈跳之影響

參、研究設備及器材



肆、研究過程或方法

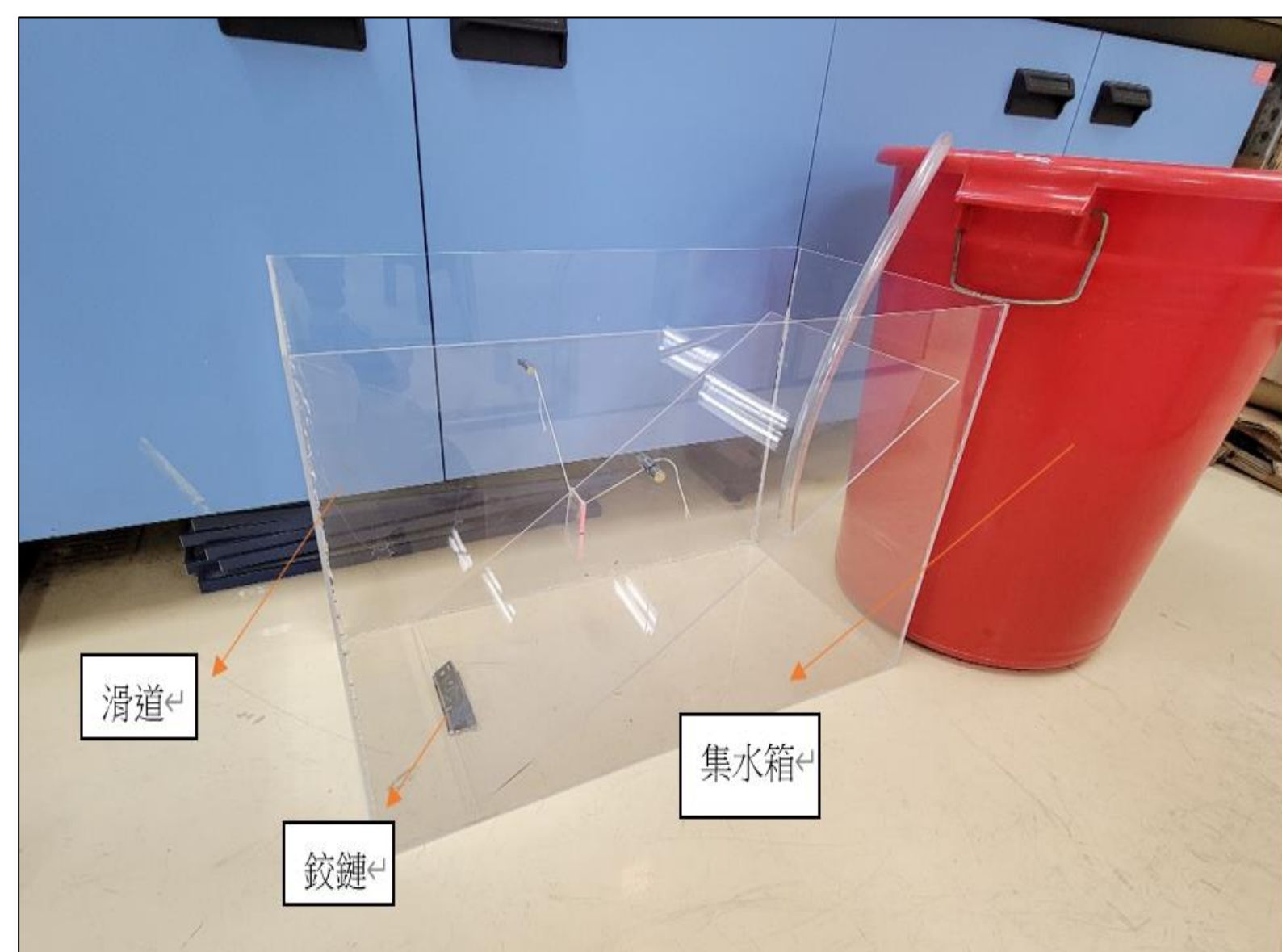
一、文獻探討

我參考了 2003 年 Lyde'ric Bocquet 的論文<The physics of stone skipping>，論文中提出相關的力學方程式，並且計算出水漂最低入水速度的方程式。此外，能量耗散方程以及彈跳次數預測方程也是其重大貢獻。

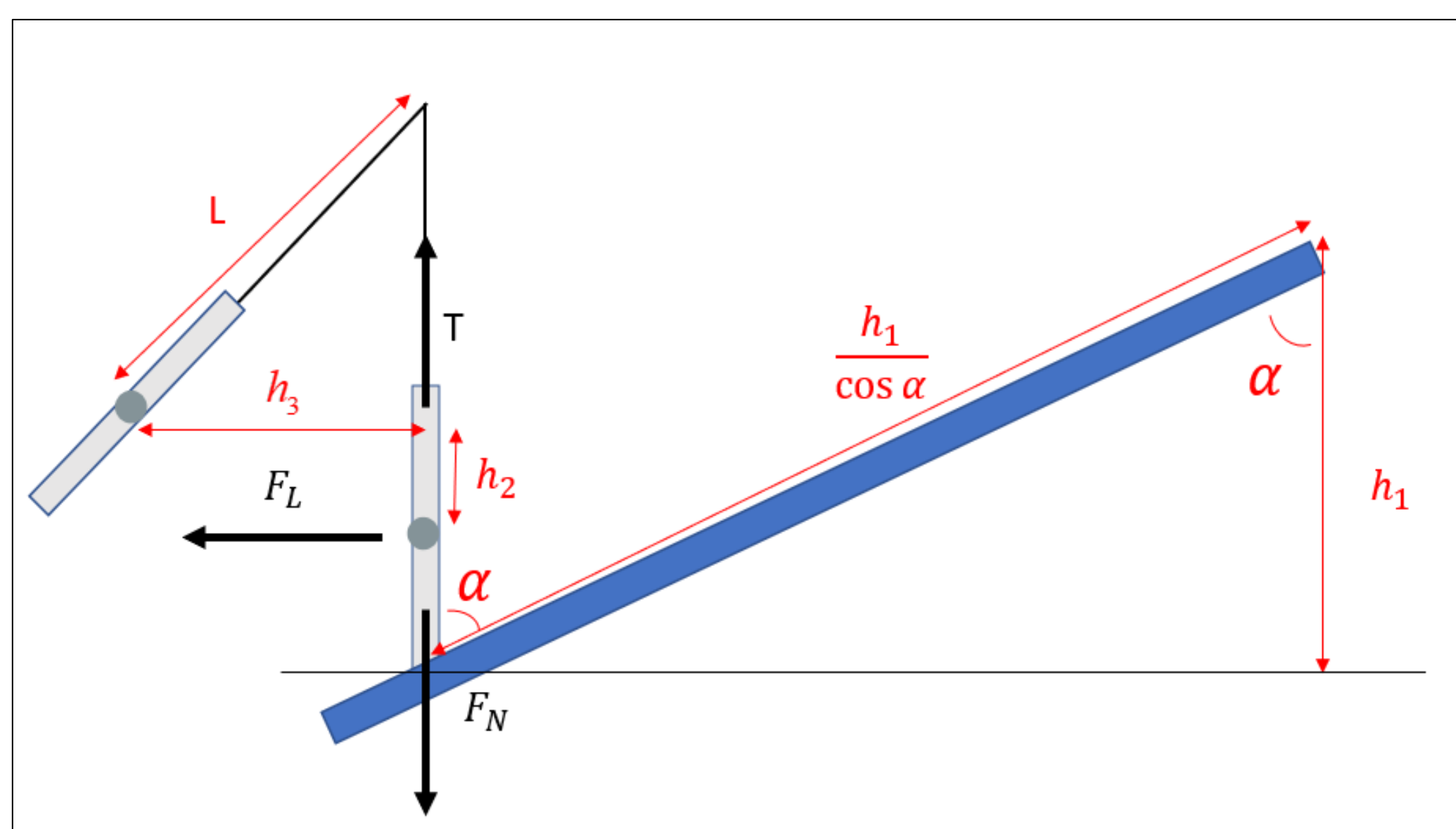
接著我參考了 2005 年 Nagahiro、Hayakawa的論文<Theoretical and Numerical Approach to "Magic Angle" of Stone Skipping>，論文中以無因次化的推導搭配電腦模擬，提出了水漂與水面存在一個 Magic Angle，約略為 20 度，此攻角能以最低入水速度達到彈跳現象，此外也提出了欲發生彈跳的最小入水速度以及石頭的幾何尺度、密度等關係式。給予我足夠的背景知識來研究。

最後我參考了 2019 年 Shih-Ping Lin 碩士論文<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>，論文中以模擬的方式說明了水漂在攻角為 20 度時，有最佳的彈跳效果，但因為沒有具體的實驗佐證，因此我打算以實驗的方式來驗證水漂最佳彈跳攻角，並且我也好奇相同攻角下，不同流速對於彈跳效果的影響，也就是如果我以相同方式丟出同一個水漂，那麼在靜止的河流與快速流動的海浪邊彈跳情形是否相同。

二、實驗裝置架設圖



圖一 實驗裝置架設圖

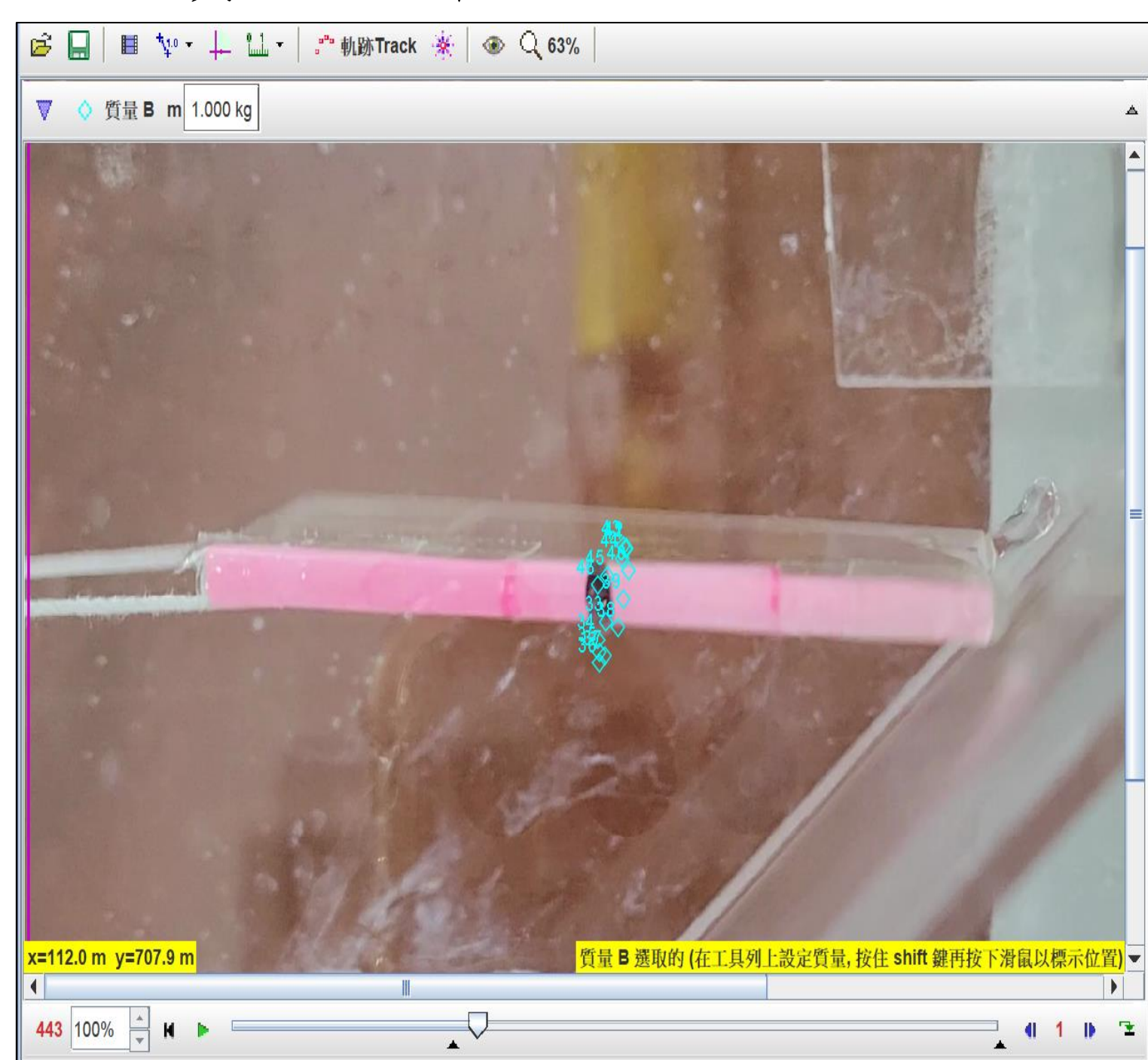


圖二 實驗參數標示圖

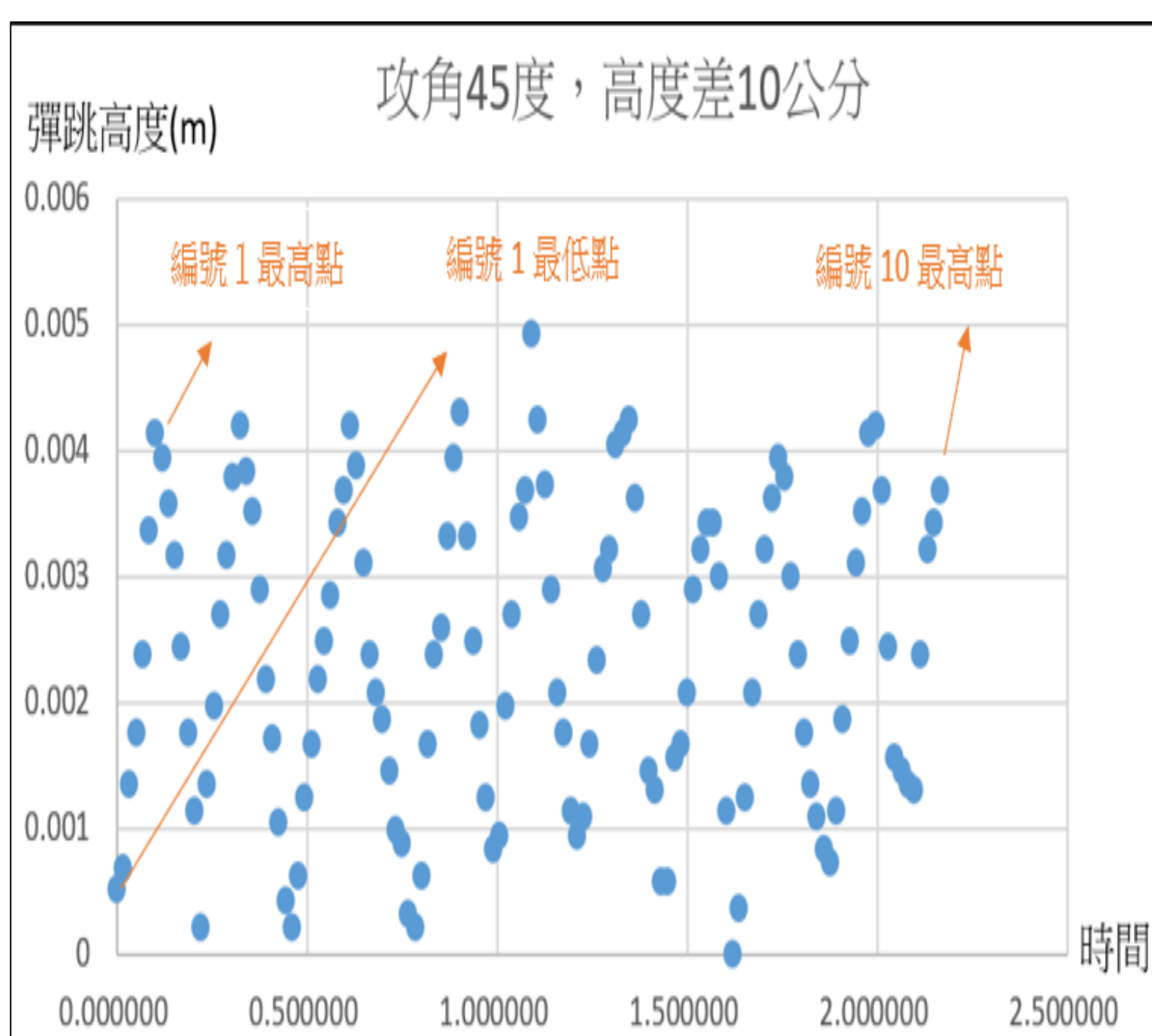
標號	意義
h_1	流體高度差
h_2	質心高度差
α	攻角
F_L	流體升力
F_N	流體阻力

表一 圖二參數

三、實驗分析過程



圖三 追蹤水漂過程



圖四 Excel數據分析

實驗參數		攻角 $\alpha=45$ 度，高度差 $h_1=10$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.414cm	0.052cm	6	0.424cm	0.076cm
2	0.419cm	0.023cm	7	0.416cm	0.073cm
3	0.425cm	0.022cm	8	0.431cm	0.012cm
4	0.429cm	0.031cm	9	0.414cm	0.022cm
5	0.491cm	0.029cm	10	0.418cm	0.056cm
最高點平均距離		0.428+0.0069cm			
最低點平均距離		0.038+0.0069cm			
平均振幅		0.390+0.0069cm			

圖五 實驗數據統整

四、實驗理論推導

➤ 實驗一：探討不同流速對於壓克力板彈跳之影響

在實驗一裝置架設中，透過改變流體初始高度，就能使初始重力位能改變，再透過重力的作用，使得重力位能轉換成流體動能，就可以調整流體撞擊壓克力板時的速度

$$E = mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha} \propto h_1 \quad (1)$$

透過功能定理可以得出流體速度

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \propto h_1 \quad (2)$$

因為水與壓克力板的接觸時間極小，因此可以把接觸時間的受力關係近似成直線加速

$$S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} \quad (3)$$

流體的升力與阻力分別為

$$F_L = \frac{1}{2}\rho AC_L v^2 \quad (4) \quad F_N = \frac{1}{2}\rho AC_N v^2 \quad (5)$$

壓克力板與水接觸瞬間，向上的繩張力與向下的流體阻力抵銷，水平方向上仍受到流體的升力，透過計算壓克力板的加速度可以得到如下的關係式

$$F_L = Ma \Rightarrow a = \frac{F_L}{M} \propto v^2 \quad (6)$$

將算式(6)的結論帶入算式(3)得到以下關係

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2SM}{F_L}} \propto \frac{1}{v} \quad (7)$$

接著，要計算壓克力板在與流體接觸期間所得到的動量

$$F_L \times t \propto v^2 \times \frac{1}{v} = v \quad (8) \quad F_L \times t = M \times v_p \propto v \quad (9)$$

透過以上推導，並利用力學能守恆的動位能轉換得出算式(10)、算式(11)

$$E_p = \frac{1}{2}Mv_p^2 \propto v^2 \quad (10) \quad E_p = Mgh_2 \quad (11)$$

將算式(2)、(10)、(11)聯立可得

$$E_p \propto v^2 \propto h_1 \propto h_2 \quad (12)$$

因此，壓克力板質心的彈跳高度應該和流體釋放高度成正比，但是考量到此研究的設計，流體並非靜止釋放，流體自管內釋放就具有一定的初速，因此施放高度與彈跳高度的關係會是一條不通過原點斜直線。

➤ 實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響

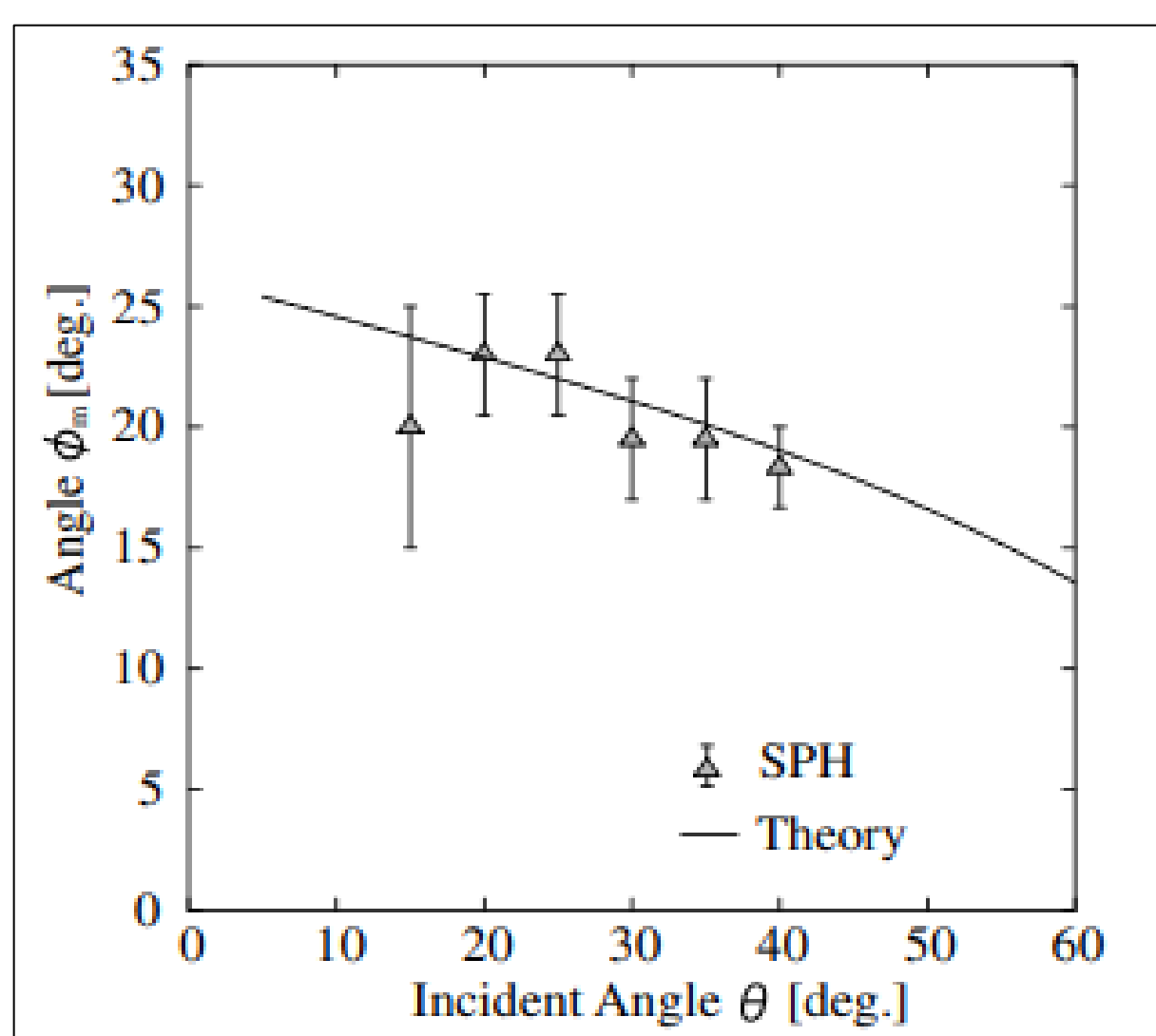
在<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>這篇論文裡面模擬了不同攻角與彈跳速度的關係，且忽略水漂在彈跳過程的形變，將其視為理想剛體，透過此模擬找出了最佳彈跳攻角大約落在20度，並與其參考文獻相符。因此本研究透過實驗驗證上述論文中的模擬結果。

並且2005年Nagahiro、Hayakawa的論文<Theoretical and Numerical Approach to “Magic Angle” of Stone Skipping>提出了以下兩條方程式，並搭配數值解析得到了攻角與最低入水速度的關係式

$$V_{\min} = \frac{\sqrt{2gR}}{\cos(\theta+\phi)} \sqrt{\xi \sin \phi + \frac{\sigma \cos \phi}{C_D \lambda \sin^2 \phi}} \quad (13) \quad \theta = \arccos \sqrt{\frac{2gR}{V_{\min}^2} \left(\xi \sin \phi + \frac{\sigma \cos \phi}{C_D \lambda \sin^2 \phi} \right)} - \phi \quad (14)$$

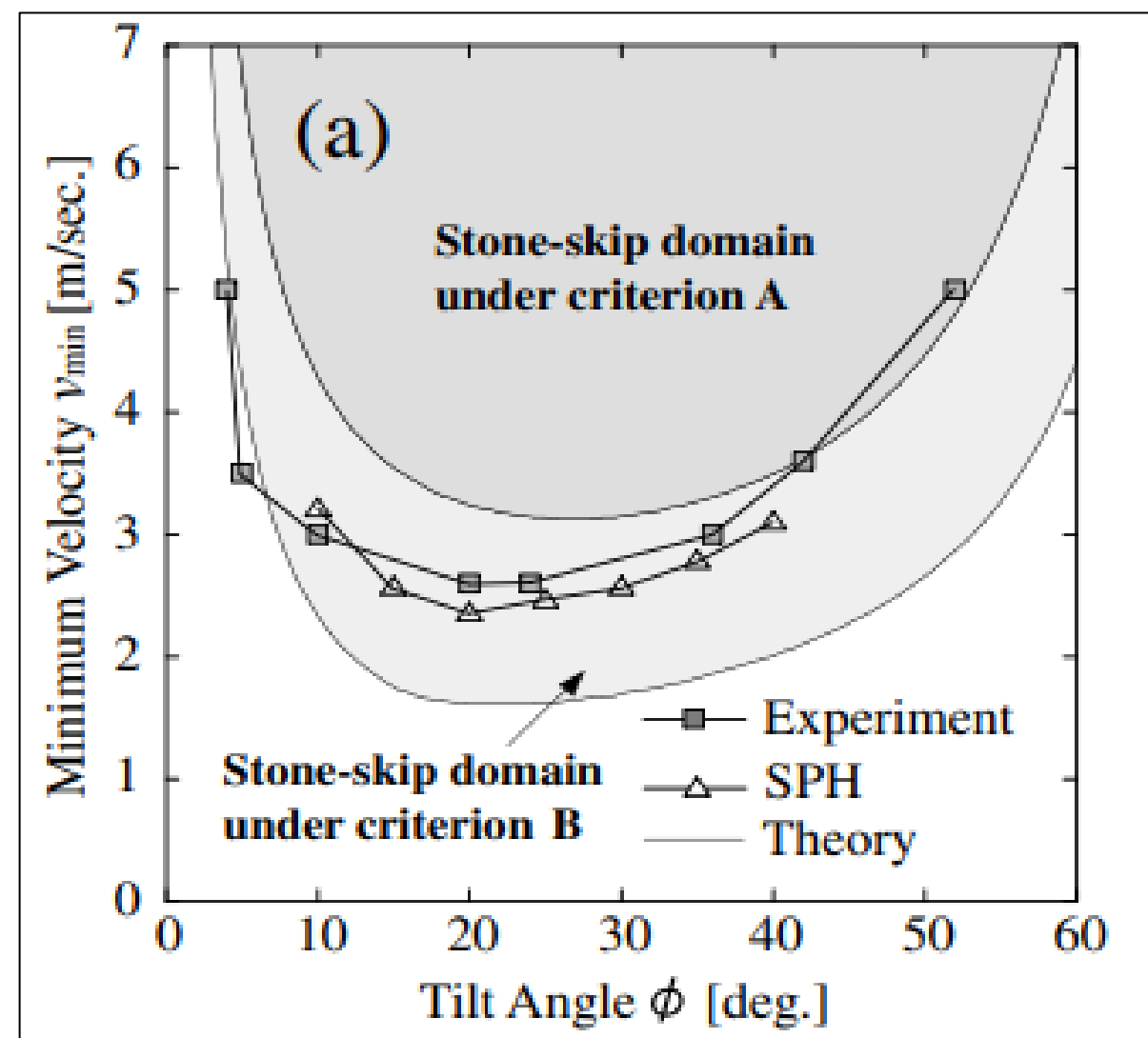
接著對算式(13)進行偏微分 (θ 、 ϕ 為變數) 當 $\frac{\partial V_{\min}}{\partial \phi} = 0$ ， $\phi \cong 20^\circ$ (15)

θ ：入水速度與水面夾角(Incident angle)
 ϕ ：攻角(Attack angle)
 σ ：水漂與流體的比重
 ξ ：水漂的沉水最大深度
 C_D ：阻力係數



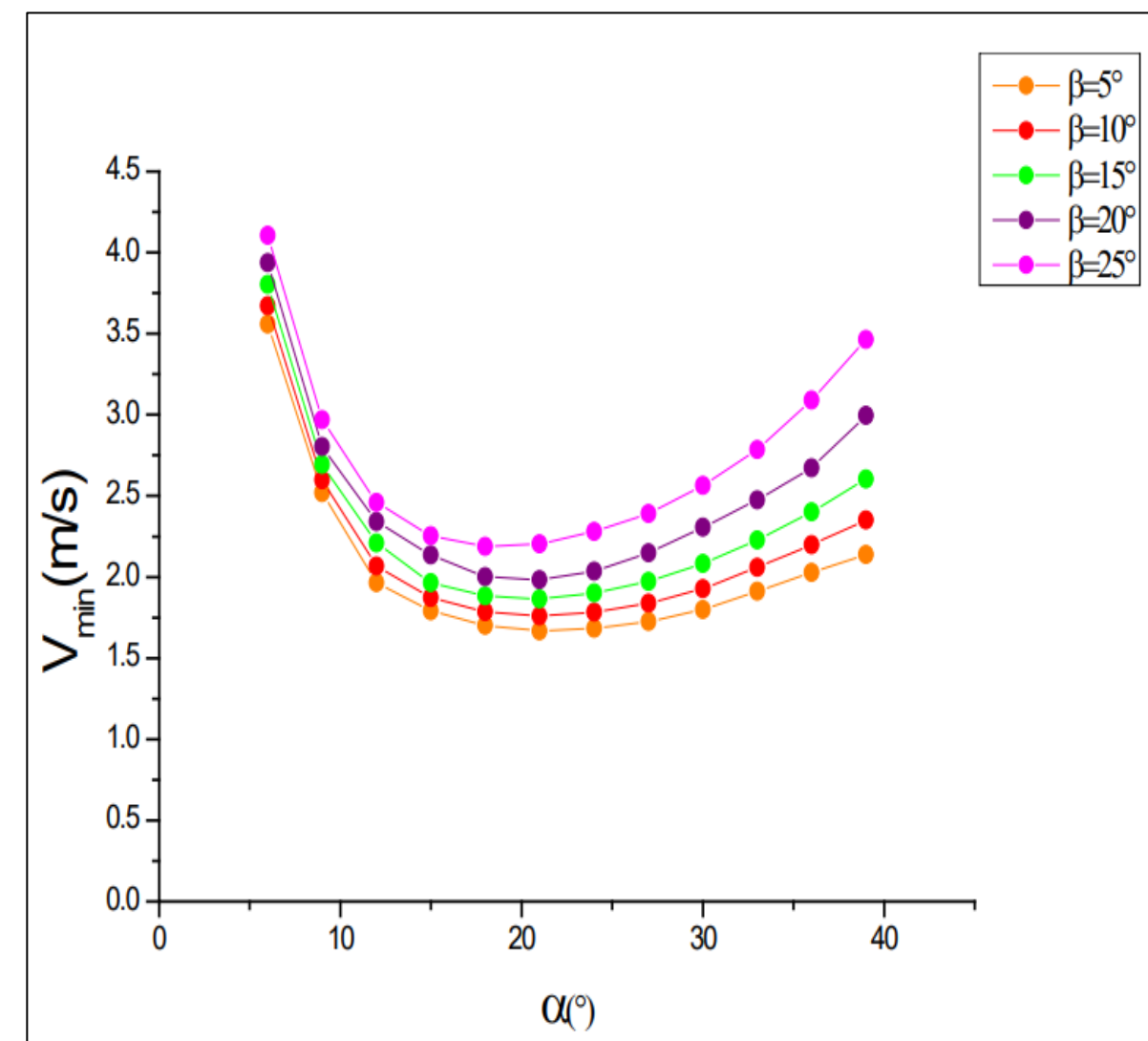
圖六 入射角和最佳攻角的關係圖

由圖六可知，不論以無因次化的推導搭配電腦模擬SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)方法，又或是數值解析的理論，都能得到20度為最佳攻角



圖七 攻角與最低入水速度的關係圖

由圖七可知，實驗、SPH模擬、數值理論都能得到高度相似的結果，可看出在攻角20度時，具有最低入水速度(Minimum Velocity)



圖八 不同入射角對最佳攻角的影響

由圖八可知，不論入射角(Incident Angle)如何改變，在攻角20度時都具有最低的入水速度，此外入射角越小，所需的最低的入水速度也較低，因此本實驗將入射角設定為0度，以此優化實驗進行。

圖六、圖七、圖八為參考論文的模擬結果。

由此三圖可知，不論入射角、水漂與流體的比重、水漂半徑與厚度的比值如何改變，攻角在20度時都能以最低的入水速度發生彈跳，因此稱此角度為 Magic Angle。

➤ 實驗三：探討不同接觸面形狀對於壓克力板彈跳之影響

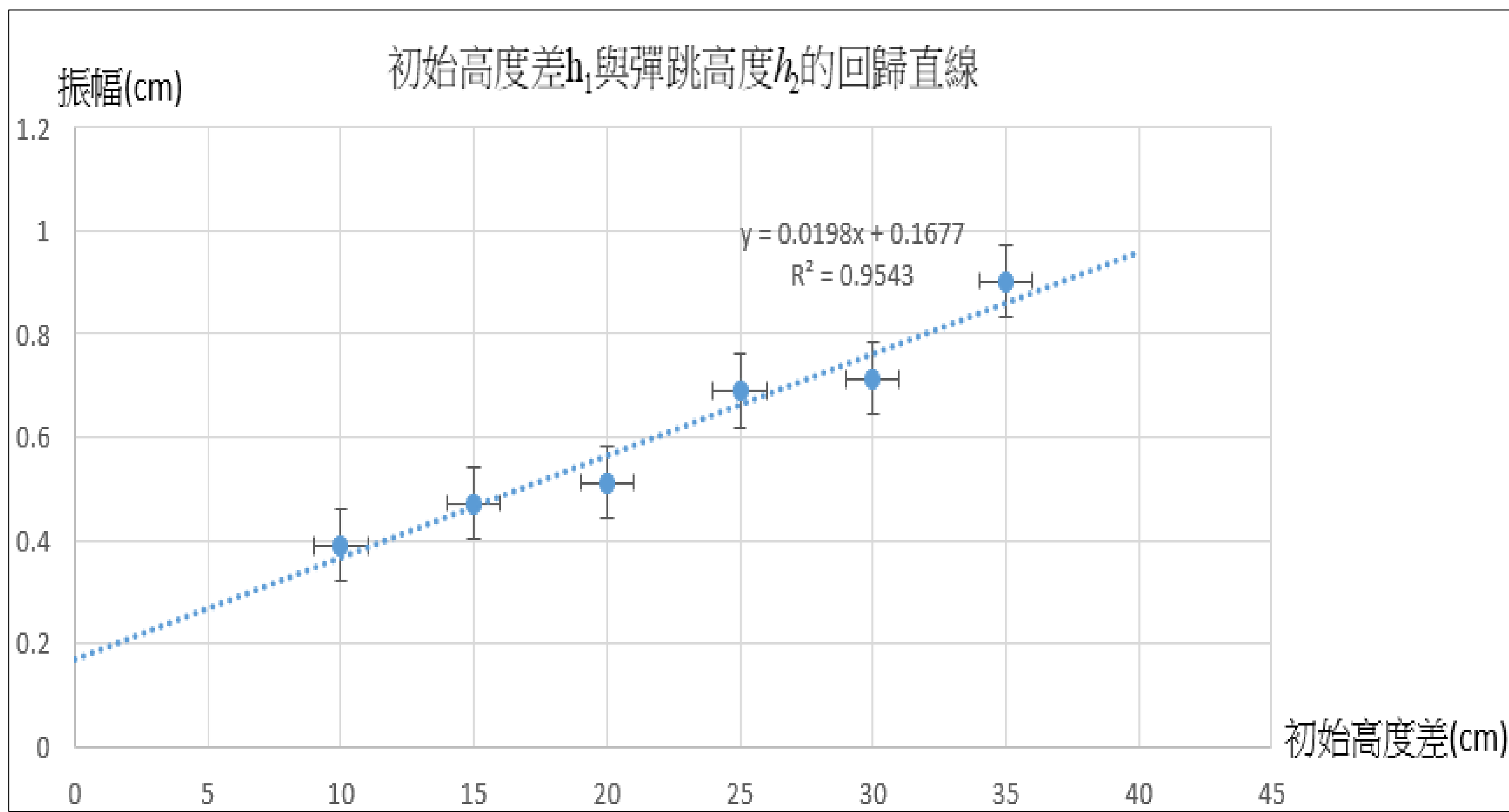
水漂照片					
接觸面形狀	未加工	切面平整	圓弧形	兩側磨成圓弧	半邊磨成圓弧
編號	1	2	3	4	5

影響實驗三結果的主要因素為紊流(Turbulent Flow)的產生與否，若接觸面的形狀阻力(Form drag)越大，則壓克力板的彈跳高度將有所下降，反之，若接觸面的形狀阻力越小，則壓克力板的彈跳高度將顯著上升。因為此研究使用的流體是水，又因為水的雷諾數相當大，因此將可忽略黏滯阻力帶來的些微影響。

- 編號1水漂的接觸面與流線相去甚遠，考量到在邊界產生的紊流與漩渦，因此彈跳高度將顯著減小。
- 編號2水漂的切面非常平整，與理想流線相似，因此推測其彈跳高度將顯著增加。
- 編號3水漂的接觸面為圓弧線，與理想流線高度相似，因此推測其擁有最高彈跳高度。
- 編號4水漂的接觸面中央保有編號1水漂的形狀，只在接觸面兩側進行加工，因此雖然接觸面形狀有改變，但推測其對於整體彈跳高度的影響將有限。
- 編號5水漂的接觸面不對稱，因此兩側受力將不平均，推測其運動過程將伴有旋轉產生，因此部分能量將供給於旋轉，而最大彈跳高度將顯著下降。

伍、研究結果與討論

➤ 實驗一：探討不同流速對於壓克力板彈跳之影響

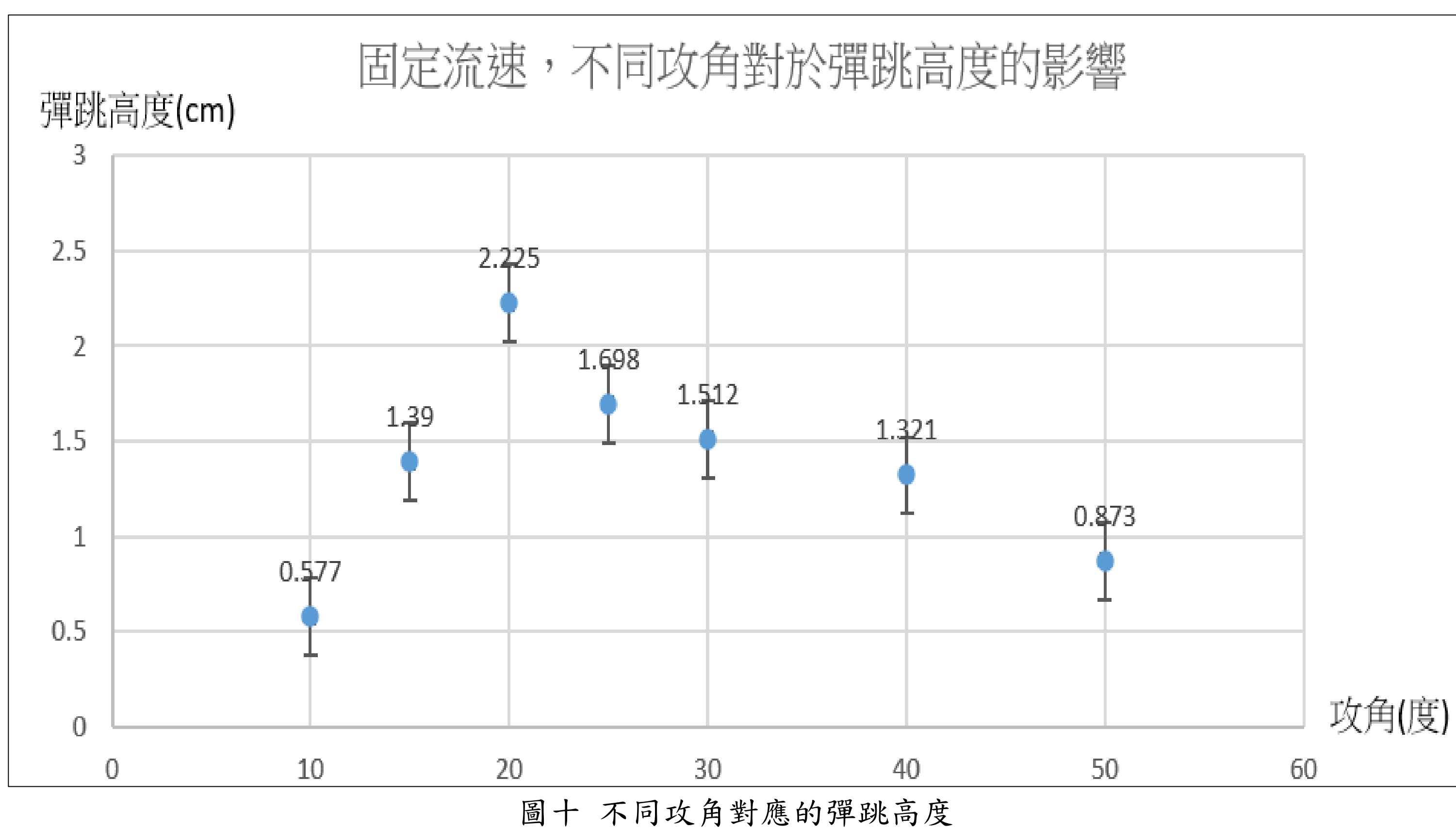


由圖九可知，在攻角固定的條件下，初始高度差與彈跳高度為**高度正相關(R=0.9768)**。

此圖擁有截距是因為一開始流體就具有**初始速度**，所以當初始高度差為0時，也會使得壓克力板進行彈跳。

實驗一可以驗證導出的算式(12)，也就是當攻角固定時，**初始高度差會正比於彈跳高度**。

➤ 實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響



由圖十可知，在攻角**20度**附近的壓克力板**彈跳效果最好**，超過或是低於20度，振幅都會有明顯的降低。

透過實驗二，可以**應證**<Theoretical and Numerical Approach to“Magic Angle”of Stone Skipping>的**SPH模擬**和**數值解析理論**以及<物體碰撞水面之流固耦合現象>的**有限元素軟體LS-PrePost模擬**。

➤ 實驗三：探討不同接觸面形狀對於壓克力板彈跳之影響

接觸面形狀	未加工	切面平整	圓弧形	兩側磨成圓弧	半邊磨成圓弧
編號	1	2	3	4	5
彈跳高度	1.239cm	2.327cm	2.683cm	1.473cm	0.673cm

表二 不同接觸面形狀對應的彈跳高度

- 由表中數據可知，編號2與編號3的彈跳高度差距很小，這與前述理論相符合，因為兩者的**接觸面形狀都與理想流線相似**，但因為圓弧形的形狀阻力略低於切面平整的形狀阻力，因此編號3的彈跳高度略高於編號2。
- 由表中數據可知，編號4的彈跳高度略高於編號1的彈跳高度，這是因為**兩側紊流與漩渦減少**的緣故，但因為編號4的圓弧占比相較編號3低了許多，因此對於彈跳高度增加的幫助有限。
- 編號5的彈跳高度明顯低於其他四者，這是因為**兩側受力不平均**，導致水漂彈跳的時候**帶有旋轉**，因此部分能量被**分給轉動動能**，因此最大重力位能值將減少，可達到的最大彈跳高度顯著低於其他四組。

陸、結論

- 在固定攻角下，初始高度差與彈跳高度成正比，且圖形關係是一條不通過原點的斜直線
- 水漂的入水角度約在20度(Magic angle)時，能以最低入水速度完成水漂彈跳，此攻角即為最佳彈跳攻角
- 透過座標轉換，可以使得我的研究架設等價於打水漂的運動模式
- 越接近圓弧形的接觸面，其彈跳效果越好
- 兩側形狀不對稱的水漂，因運動過程伴有轉動產生，其彈跳高度顯著下降

柒、參考文獻

- 文獻一、【學位論文】林世平(2019)。物體碰撞水面之流固耦合現象討論-以打水漂為例。台北市：台大應力所
- 文獻二、【學位論文】Lyde´ric Bocquet(2002).The physics of stone skipping.France
- 文獻三、【學位論文】Shin-ichiro Nagahiro and Yoshinori Hayakawa(2005). Theoretical and Numerical Approach to Magic Angle of Stone Skipping.Japan