摘要

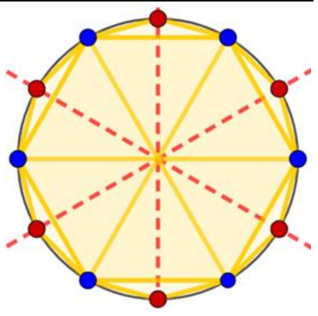
本文主要探討平面上的n個點的分佈，滿足『任兩點取中垂線必過至少餘下一點』的性質，我們稱之為n點的祖沖之點集。首先，3、4點的祖沖之點集分別僅有一種，且正奇數邊形的頂點亦屬於祖沖之點集；當$n\ge5$，1點為圓心且其餘$n-1$點共圓為祖沖之點集的特殊形態。然後，我們主要探討平面上n點的祖沖之點集全部的型態，首先利用中垂線帶來的對稱性來討論祖沖之點集，發現分類嚴謹性十分的繁瑣困難；接著在過程中延伸出基本圖形的疊加，得到n點對稱祖沖之點集個數的討論方法；最後利用質因數分解法，並透過基本圖形與對稱分割區塊來快速得到祖沖之點集。最後，我們延伸祖沖之點集的定義至三維空間，並希望未來能找出所有的祖沖之點集。

研究動機

在圓內接一個正n邊形，取其各邊中垂線與圓的交點，可得一正$2n$邊形，以此規則不斷做出正多邊形，最後會逼近一圓，祖沖之就是用此方法求得圓周率近似值。在此規則中，正n邊形的n個點中任兩點取中垂線必過正$2n$邊形的上一點，因此我們定義滿足『任兩點取中垂線必過至少餘下一點』的點集為祖沖之點集。而圓就是個無限多點的祖沖之點集，所以我們好奇有限點的祖沖之點集型態為何。

研究過程或方法

Ⅰ. 名詞解釋



1. 二維n點的祖沖之點集：若平面上相異n個點中，$n\ge3$，任取2點作中垂線，都至少過原來n個點中的其中1個點，則我們稱這n個點為一個「二維n點的祖沖之點集」。
2. 三維n點的祖沖之點集：若空間中相異n個點中，$n\ge4$，任取2點作中垂面，都至少過原來n個點中的其中2個點，則我們稱這n個點為一個「三維n點的祖沖之點集」。
3. 正三角形的重疊階數：若正三角形之間的共用區域(不含邊)由n個正三角形共用，則稱該區為$n-1$階重疊。
4. 祖沖之點集個數$J(n)$：若點集所圍成的多邊形互為相似形，則定成相同的祖沖之點集。若n點的祖沖之點集形成個不同的相似形，則定義$J(n)=m$，稱為大祖沖之點集$J(n)$。
5. 圓上$n-1$個點與圓心所形成的n點祖沖之點集種類數$j(n)$：我們以$j(n)$表示圓上$n-1$個點與圓心所形成的n點祖沖之點集種類數。
6. 小祖沖之點集個數J_n：在大祖沖之點集裡，若把圓上$n-1$個點與圓心所形成的n點祖沖之點集『視為1個』祖沖之點集，則平面上n個點的祖沖之點集個數定義為J_n，稱之為小祖沖之點集J_n。

Ⅱ. 研究流程

二維祖沖之點集性質	二維祖沖之點集討論方法	三維祖沖之點集性質	討論
$n=3$、$n=4$、$n\ge5$	基本圖形疊加、質因數分解	$n=4$、$n=4k+2$、$n=3k+2$	金字塔、橢圓球想法

Ⅲ. 預備知識

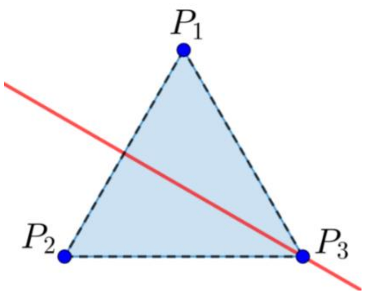
<Lemma 1> 中垂線/面性質：中垂線/中垂面上任一點到線段兩端點等距離。

<Lemma 2> 正n邊形的對稱性：若n是奇數，則正n邊形所有對稱軸都過一頂點及其對邊中點。

Ⅳ. 二維n點的祖沖之點集定理

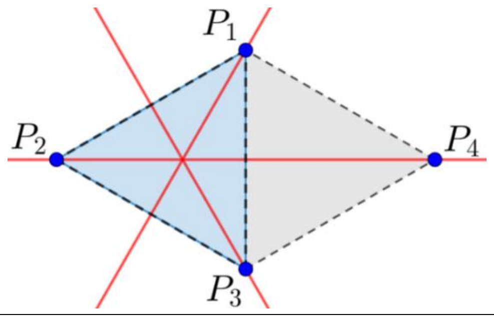
<Theorem 1>

當$n=3$時，$j(3)=J(3)=J_3=1$，且二維3點的祖沖之點集必為正三角形的3個頂點。

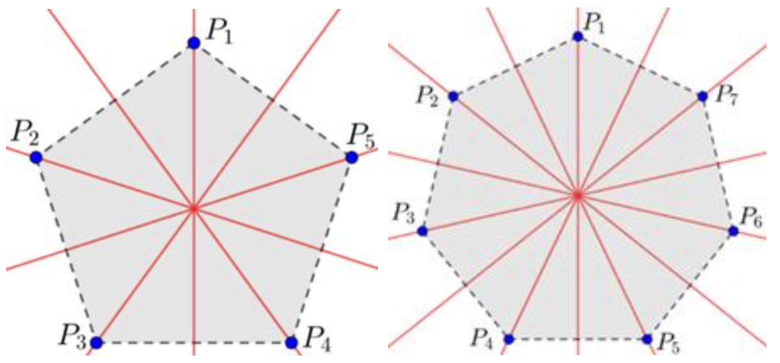


< Theorem 2 >

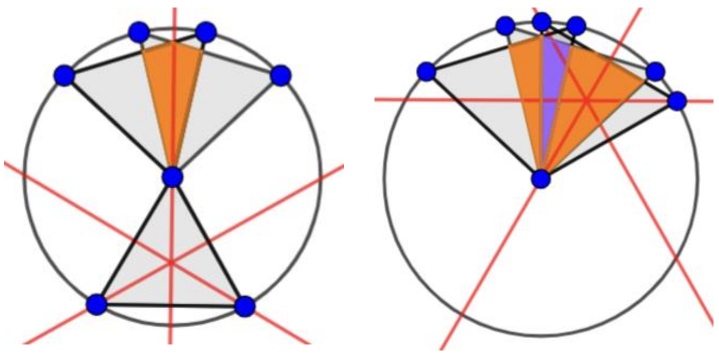
當$n=4$時，$j(4)=J(4)=J_4=1$，且二維4點的祖沖之點集必為兩個正三角形所構成之菱形的4個頂點。



< Theorem 3 > 正奇數邊形的頂點必為祖沖之點集。



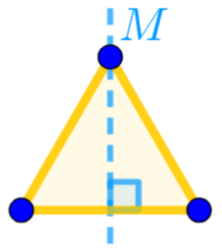
< Theorem 4 > 當$n\ge5$時，二維n點的祖沖之點集有無限多組，即$J(n)=\infty$，當$n\ge5$。可以圓上旋轉正三角形的方法，創造出無限多二維n點的祖沖之點集。



Ⅴ. 二維n點的祖沖之基本圖形性質

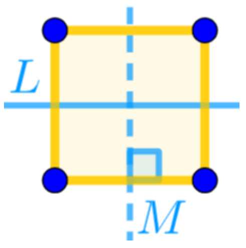
3點：正三角形

正三角形本身即為祖沖之點集，只需考慮新增的點和圖形關係即可



4點：正方形

扣除兩中垂線L、M，其餘中垂線上皆有點，在L、M上加點可形成祖沖之點集

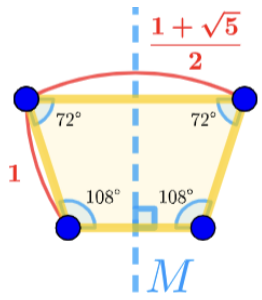


4點：祖沖之梯

底角為108°的等腰梯形

上底長:腰長:下底長

$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1:1$



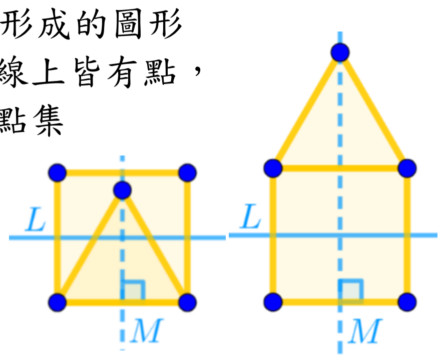
祖沖之梯的四點中，任取非對稱兩點之中垂線上必有點，因此在對稱軸上加點即可形成祖沖之點集

5點：囗五點形

正方形一邊做正三角形所形成的圖形

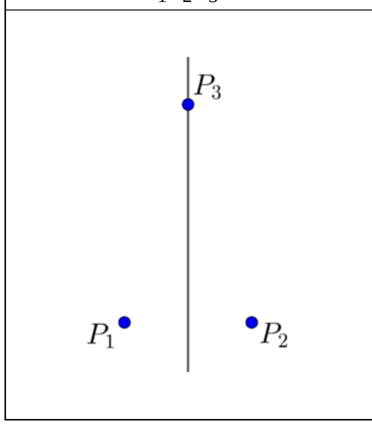
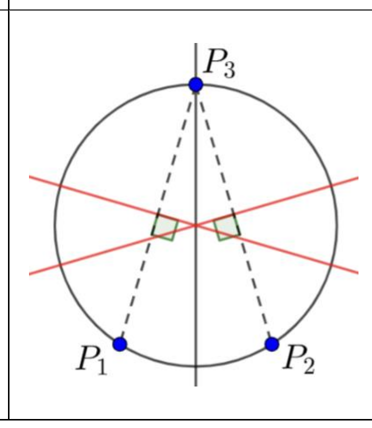
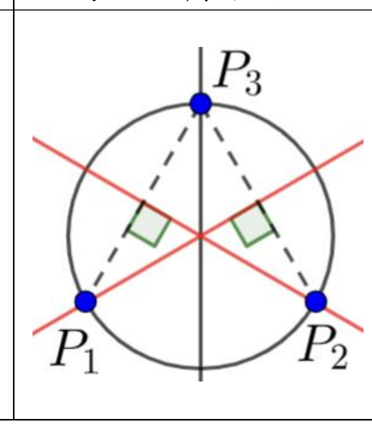
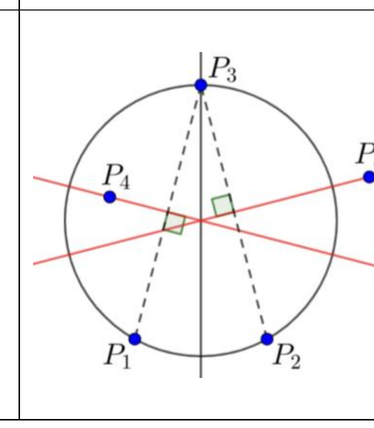
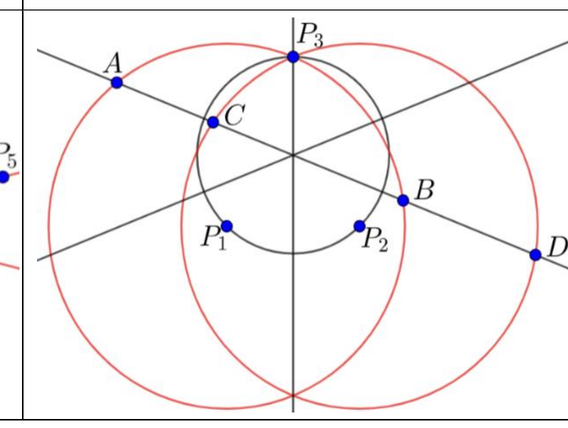
扣除中垂線L，其餘中垂線上皆有點，

在L上加點可形成祖沖之點集



VI.二維 n 點的祖沖之點集探討方法

一、一般化祖沖之點集的證明

令 P_1 在平面上兩點 P_2、P_3 中垂線上，並做 $\Delta P_1P_2P_3$ 外接圓	依點集中最多幾點共圓做分類	找 M_{13}、M_{23} 上的點，並以 $\Delta P_1P_2P_3$ 是否為正三角形分類	以兩中垂線與圓的交點情形分 case 討論	但過程中，case 繁多不便解決
				

二、基本圖形疊加法

以 $n=6$ 為例：

固定一個基本圖形為底圖 → 依對稱性在底圖邊或點上疊加基本圖形 → 討論是否為祖沖之點集

1.底圖為正三角形

須外加3點（3點基本圖形+3點）

考慮：

(1).共邊疊3個正Δ

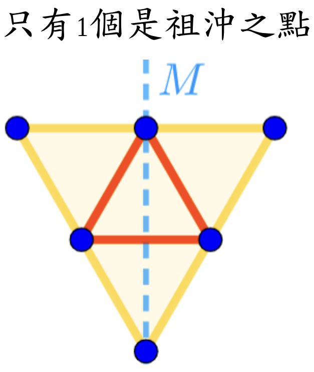
(2).共點及共邊各疊1個正Δ

(3).共點疊1個正方形

(4).共點疊1個祖沖之梯

(5).共邊疊1個⌂五點形

其中只有1個是祖沖之點集



2.底圖為正方形

Case1°:對稱軸上無點

∵對稱軸上無點

∴增加的 2 點都在對稱軸上

Case2°:對稱軸上有 2 點

考慮：

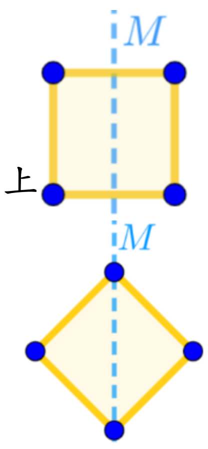
(1).共邊疊2個正Δ

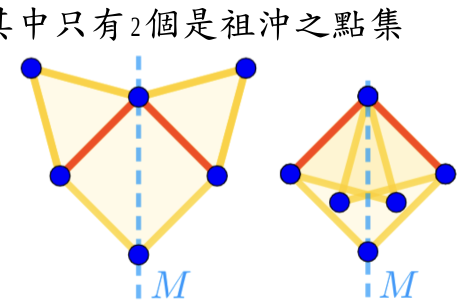
(2).共點疊1個正Δ

(3).共邊疊1個正方形

(4).共邊疊1個祖沖之梯

其中只有2個是祖沖之點集





3.底圖為祖沖之梯

∵對稱軸上無點，∴增加的2點都在對稱軸上

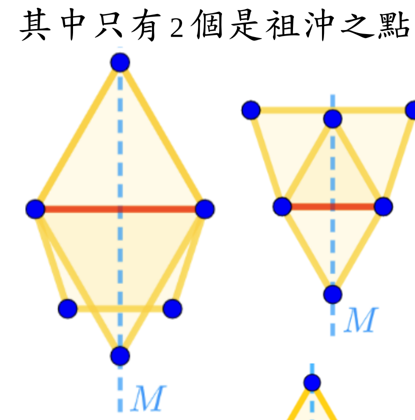
考慮：　其中只有2個是祖沖之點集

(1).共邊疊2個正Δ

(2).共點疊1個正Δ

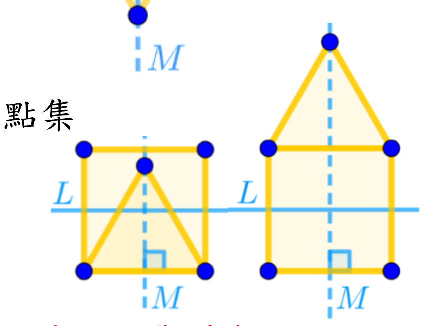
(3).共邊疊1個正方形

(4).共邊疊1個祖沖之梯



4.底圖為⌂五點形

同先前 case，非祖沖之點集



由以上證明，6點對稱祖沖之點集僅有5個

三、質因數分解法

以 $n=6$ 為例：

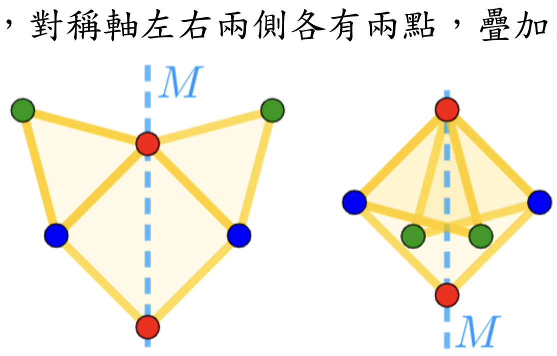
對點數n做質因數分解 → 依據因數區分對稱軸上的點或基本圖形 → 依缺少的點數疊加基本圖形

$6=2\times3$，代表對稱軸上有2點或基本圖形為正三角形

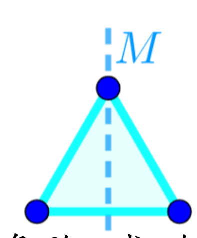
1.對稱軸上點

(1). 對稱軸上有兩紅點

(2). $6=2+4$，對稱軸左右兩側各有兩點，疊加2個正三角形

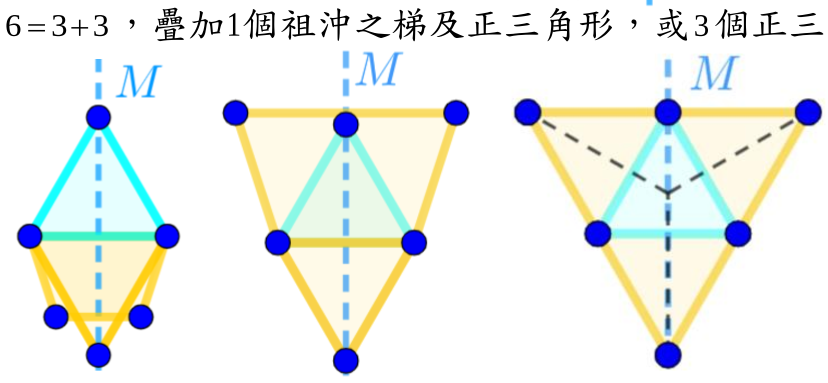


2.基本圖形



(1). 基本圖形為三點的正三角形

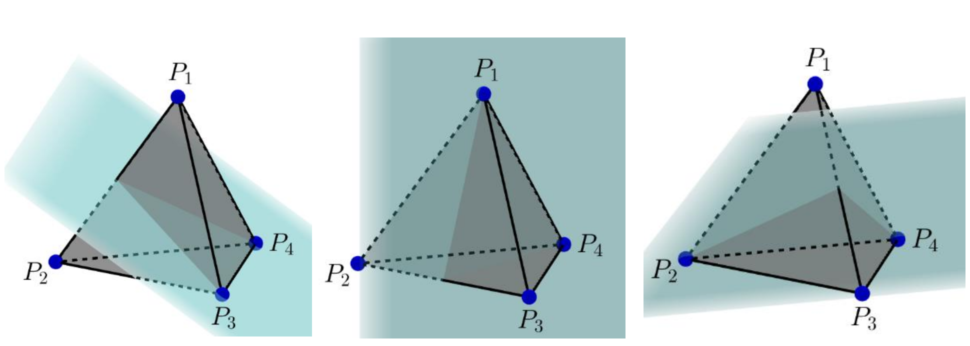
(2). $6=3+3$，疊加1個祖沖之梯及正三角形，或3個正三角形



由以上證明，6點祖沖之點集僅有5個

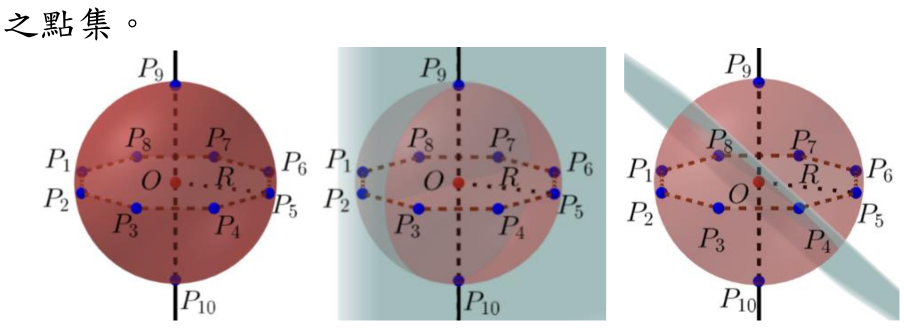
VII. 三維 n 點的祖沖之點集性質

當 $n=4$ 時，$J_4=J(4)=1$，且三維4點的祖沖之點集必為正四面體的4個頂點。



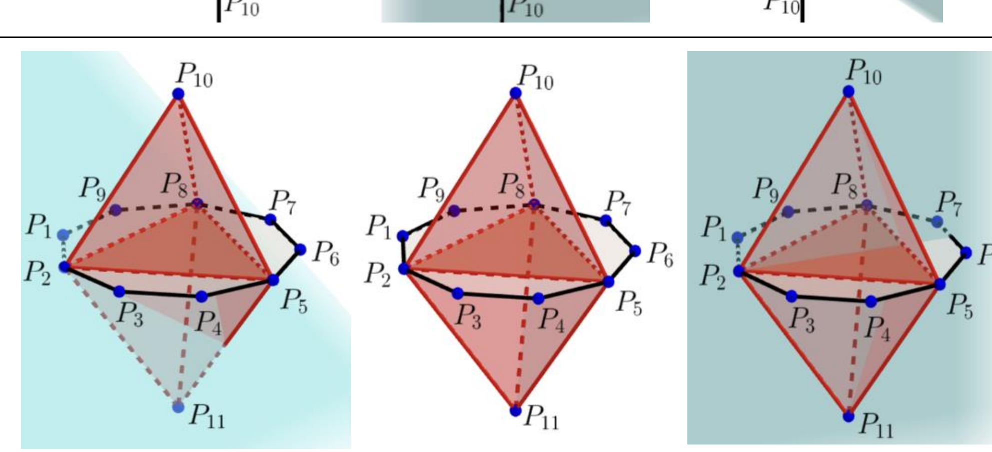
一個三維 $4n+2$ 點的祖沖之點集作法：

以正 $4n$ 邊形 $P_1P_2\ldots P_{4n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 的外心 O 為球心，外接圓半徑 R 為球體半徑作一球體，此球體與過外心且垂直於此正 $4n$ 邊形之垂直線交於2點 P_{4n+1},P_{4n+2}，則 $P_1,P_2,\ldots,P_{4n+2}$ 為一個三維 $4n+2$ 點的祖沖之點集。



一個三維 $3n+2$ 點的祖沖之點集作法：

在正 $3n$ 邊形 $P_1P_2\ldots P_{3n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 的頂點中，必存在三點會形成正三角形，並在此正 $3n$ 邊形外取兩點 P_{3n+1},P_{3n+2}，使得這兩點分別在正 $3n$ 邊形的兩側與上述三點共作出兩個正四面體，則 $P_1,P_2,\ldots,P_{3n+2}$ 為一個三維 $3n+2$ 點的祖沖之點集。



Ⅷ. 二維 n 點的圓上祖沖之點集分類

9 點： $j(9)=7$ (0) (1-1) (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1)	10 點： $j(10)=10$ (0) (1-1) (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (2-3) (3-2) (4-1)	11 點： $j(11)=11$ (0) (1-1) (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (1-4) (2-3) (3-2) (4-1)	12 點： $j(12)=14$ (1-1) (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (1-4) (2-3) (3-2) (4-1) (2-4) (3-3) (4-2) (5-1)
13 點： $j(13)=15$ (1-1) (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (1-4) (2-3) (3-2) (4-1) (1-5) (2-4) (3-3) (4-2) (5-1)	14 點： $j(14)=19$ (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (1-4) (2-3) (3-2) (4-1) (1-5) (2-4) (3-3) (4-2) (5-1) (2-5) (3-4) (4-3) (5-2) (6-1)	15 點： $j(15)=21$ (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (1-4) (2-3) (3-2) (4-1) (1-5) (2-4) (3-3) (4-2) (5-1) (1-6) (2-5) (3-4) (4-3) (5-2) (6-1) (7-1)	16 點： $j(16)=26$ (1-2) (2-1) (1-3) (2-2) (3-1) (1-4) (2-3) (3-2) (4-1) (1-5) (2-4) (3-3) (4-2) (5-1) (1-6) (2-5) (3-4) (4-3) (5-2) (6-1) (2-6) (3-5) (4-4) (5-3) (6-2) (7-1) (8-1)

當點數到22點時，不存在最高階數為1的情形，於是我們選擇停在22點，不再繼續研究更高點數的規律，而我們對於22點以下(不含22點)的分類有下列4個歸納，其中 $3\le n\le 21$, $n\in\mathbb{N}$ ：

1.種類增加：我們發現從6點開始，每增加2點，金字塔最下方就會增加一列，且若點數 n 為偶數，金字塔最左下角的分類 $[1-(\frac{n-2}{2})]$ 不存在。從15點開始，每增加2點，最右下角就會多出一種分類，若點數 n 為奇數，則此分類為 $[(\frac{n-1}{2})-1]$ ；若點數 n 為偶數，則此分類為 $(\frac{n}{2}-1)$ 。

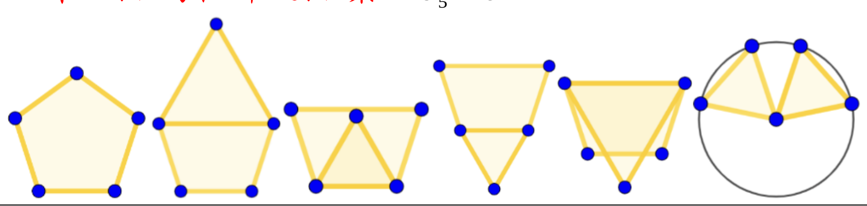
2.種類減少：當點數增加到12點時，最少要6個相異的正三角形，又圓一圈只有 360° ，所以沒有三角形不重疊的情形。依此類推，我們推測從12點開始，每增加2點，金字塔的上方會減少一種分類 $[(\frac{n-12}{2})-1]$ 。

3. $j(n)$ 推論(n 為奇數)：當 $n\neq 15$ 時， $j(n)=j(n-1)+1$ ；當 $n=15$ 時， $j(n)=j(n-1)+2$ ，即 $j(15)=j(14)+2=19+2=21$ 。

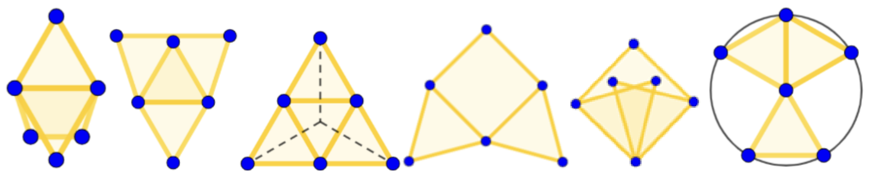
4. $j(n)$ 推論(n 為偶數)：當 $n<12$ 時， $j(n)=j(n-1)+(\frac{n}{2}-2)$ ；當 $n\ge 12$ 時， $j(n)=j(n-1)+(\frac{n}{2}-3)$ 。

Ⅸ. 二維 n 點的祖沖之點集

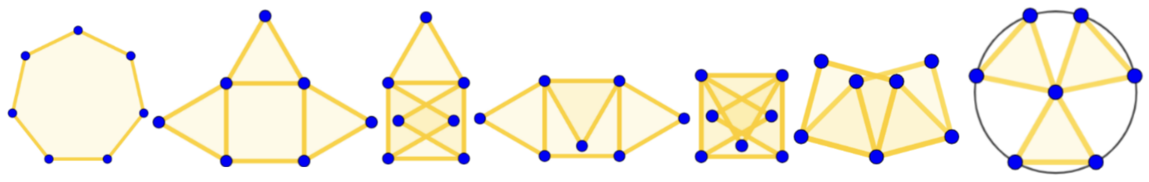
二維 5 點的祖沖之點集： $J_5=6$



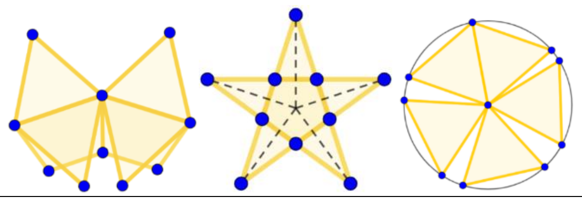
二維 6 點的祖沖之點集： $J_6=6$



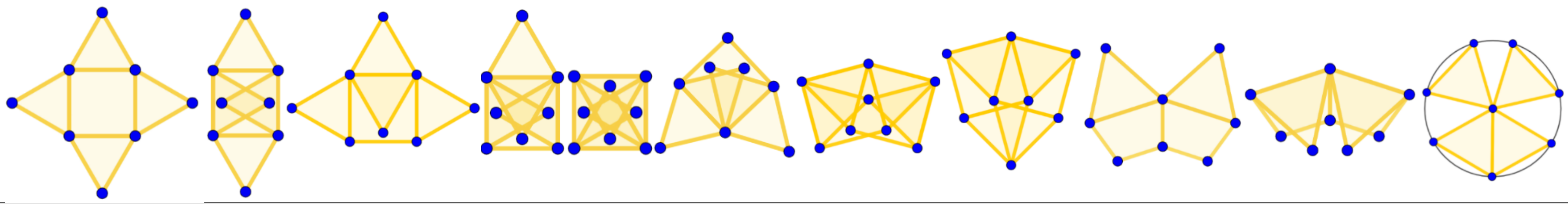
二維 7 點的祖沖之點集： $J_7=7$



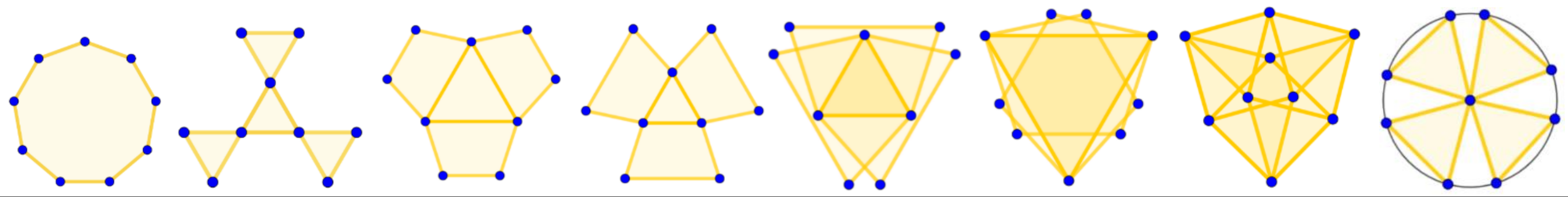
二維 10 點的祖沖之點集： $J_{10}=3$



二維 8 點的祖沖之點集： $J_8=11$



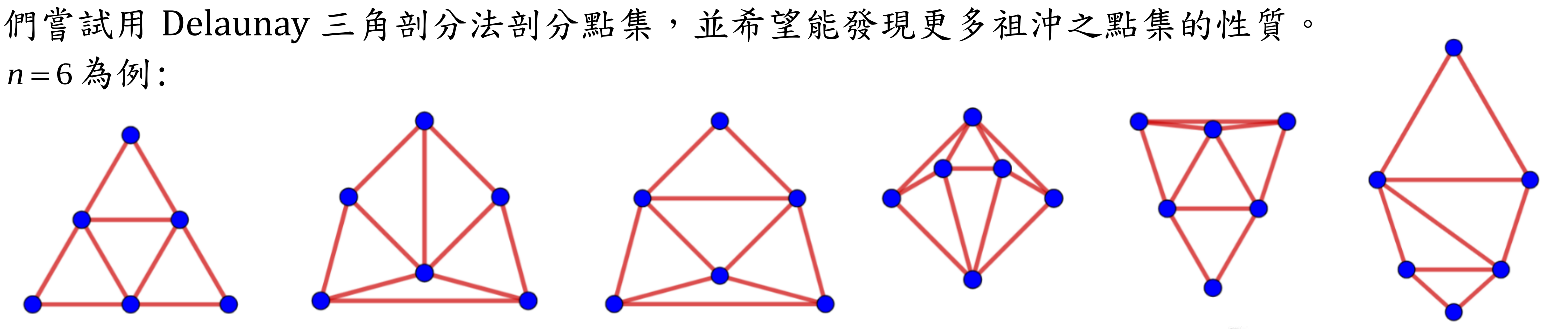
二維 9 點的祖沖之點集： $J_9=8$



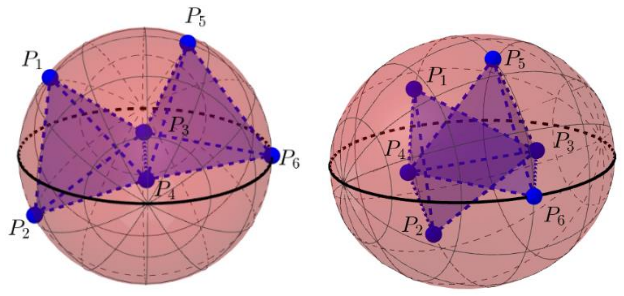
討論

一、當點數超過二位數，以 12 點為例：要討論 2×6 、 3×4 的疊加，這將讓疊加的圖形有更多的限制，困難度也就越高。所以我們猜測，除了正奇數邊形以及圓上分類外，高點數的祖沖之點集個數會越來越少。

二、我們嘗試用 Delaunay 三角剖分法剖分點集，並希望能發現更多祖沖之點集的性質。
以 $n=6$ 為例:



三、本文未提到三維的祖沖之點集分類，但我們以二維的分類方式為發想，將圓上旋轉正三角形改為：在橢圓球內旋轉正四面體，這麼做能使其滿足三維祖沖之點集的定義。我們期望之後能以這樣的方法證明之。



參考資料

[1]許志農。108 課綱 普通型高級中學 數學 2 課本。龍騰出版社，單元 1 數列與遞迴關係。
[2]許志農。108 課綱 普通型高級中學 數學 4A 課本。龍騰出版社，單元 1 空間概念。
[3]百度百科。Delaunay 三角剖分算法 https://reurl.cc/zAg5gp