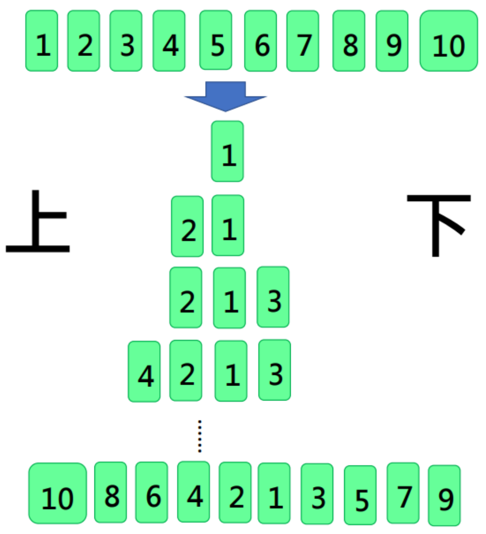
## 摘要


先給定 $n$ 張牌，第一張牌號為1，第二張牌號為2，⋯，第 $n$ 張牌號為 $n$，本研究主要探討在特定洗牌規則下，(1)哪些牌號在無論如何洗牌皆不會改變它原來的排序，也就是，無論洗牌次數為何，$k$ 號牌一直保持於第 $k$ 張，並稱之為固定點。(2)那些牌張數 $n$，必須至少洗 $n$ 次牌，才能使得所有牌號回歸原位。我們透過矩陣對角化、特徵方程式、基本列運算矩陣、循環的角度來探討，主要來解決上述兩個問題。最後更是延伸變化洗牌規則，得到更多結論的規律。


## 動機

由[1]2000年 TRML 思考賽，題目如下：

「有一台久久洗牌機，如果將 $n$ 張牌放入這洗牌機，它就會照下列步驟來洗牌：
首先放好第一張牌以後，再拿出第二張牌放在第一張牌的上面，
接著再拿出第三張牌放在前兩張牌的下面，
然後再拿出第四張牌放在前面三張牌的上面；如此繼續進行下去，
如果拿出第 $2k$ 張牌(偶數張牌)就放在所有前面($2k-1$)張牌的上面，
如果拿出第($2k+1$)張牌(奇數張牌)就放在所有前面 $2k$ 張牌的下面。
依序拿牌、放牌直到第 $n$ 張牌拿出並放好，才結束『一次完整的洗牌動作』。」
例如，有10張牌時，結果如右圖所示。
如果一副牌中的第 $k$ 張牌，經過一次完整的洗牌動作後，
這第 $k$ 張牌仍留在第 $k$ 張牌，這時我們稱這第 $k$ 張牌「保持在原來的位置」。
例如上述的例子中，只有第4張牌保持在原來的位置，其餘都變動。

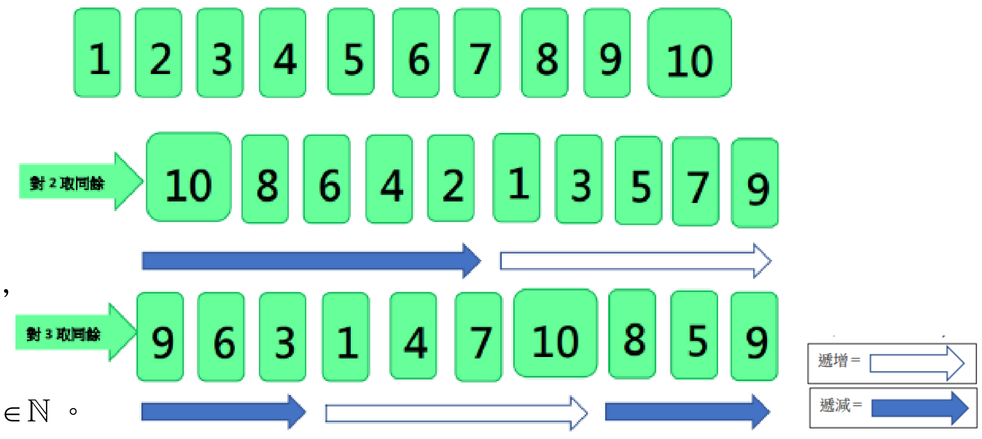



研究流程圖


## 符號定義與預備定理

Def1

洗牌規則-對 $n$ 取同餘：
我們先研究分為奇數偶數並依序偶數遞減奇數遞增，
其後我們試著將牌依其次序除以 $n$ 時，
餘數為 0、1、2⋯$n-1$分為 $n$ 堆(牌數大於等於 $n$)，
並依序從第 1 堆遞減排列，第 2 堆遞增排列⋯到第 $n$ 堆，
此洗牌規則稱為「對 $n$ 取同餘」。
在洗牌規則對 2 取同餘下，由特徵方程式可以求得特徵根，
以下定義 $\omega_n$ 為1的 $n$ 次方根且 $\pi_{i,j}$ 為 $n=i$ 時第 $j$ 個特徵根，
其中 $\omega_n=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right),0\le k\le n-1,k\in\mathbb{Z}$ ，$j\le i,i,j\in\mathbb{N}$ 。




Def2

固定點-經過一次洗牌後，若第 $k$ 張牌還留在第 $k$ 個位置，則我們稱 $k$ 為固定點。

**預備定理**

引理一：棣美弗定理 若有一複數 $z$，其中 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta),r>0$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

引理二：*Disjoint cycle decomposition*

令 $i_1,i_2,\ldots,i_k$ 是在 $S_n=\{1,2,\ldots,n\}$ 中 $k$ 個相異整數，用 $\left(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k\right)$ 表示 $S_n$ 中的一個元素 $\sigma$ 將 $s\in\{1,2,\ldots,n\}$ 送到

$$\sigma(s)=\begin{cases} i_{j+1}, & 若 s=i_j 且 1\le j\le k-1; \\ i_1 & 若 s=i_k; \\ s & 若 s\notin\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}. \end{cases}$$

也就是 $\sigma$ 將 $i_1\mapsto i_2, i_2\mapsto i_3,\ldots,i_k\mapsto i_1$ 並且將非 $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ 的數原封不動。

我們稱 $\left(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k\right)$ 是一個 $k-cycle$

Def3：令 $\sigma\in S_n$，若 $\sigma=\sigma_1\bullet\sigma_2\cdots\sigma_r$ 是 $\sigma$ 的 *Disjoint cycle decomposition*，其中 $\sigma_i$ 是一個 $n_i-cycle$
則 $ord(\sigma)=lcm\left[n_1,n_2,\ldots,n_r\right]$。

## 研究內容

*property*1 在洗牌規則對 2 取同餘下，牌數為 $n$ 張，洗 $n$ 張牌的規則單位矩陣 $T_n$ 為：

$$T_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad T_5=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$T_{2k}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&\iddots&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&&\vdots&\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\ddots&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad T_{2k+1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&\iddots&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&&\vdots&&\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\ddots&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

基本列運算矩陣

以 $n=8$ 為例，要找出洗幾次回到原位即找出 $[E_{26}E_{23}E_{24}E_{18}E_{17}E_{15}]^n=I_8$ 的 $n$ 最小正整數解。

| $n$ | 基本列運算矩陣 |
|---|---|
| 2 | $E_{12}$ |
| 4 | $E_{14}E_{13}$ |
| 6 | $E_{16}E_{15}E_{13}E_{12}E_{14}$ |
| 8 | $E_{26}E_{23}E_{24}E_{18}E_{17}E_{15}$ |
| 10 | $E_{28}E_{25}E_{1,10}E_{19}E_{17}E_{13}E_{16}$ |

| $n$ | 基本列運算矩陣 |
|---|---|
| 12 | $E_{38}E_{1,12}E_{1,11}E_{19}E_{15}E_{14}E_{16}E_{12}E_{1,10}E_{17}$ |
| 14 | $E_{1,14}E_{1,13}E_{1,11}E_{17}E_{12}E_{1,12}E_{19}E_{13}E_{1,10}E_{15}E_{16}E_{14}E_{18}$ |
| 16 | $E_{3,12}E_{37}E_{34}E_{3,10}E_{2,14}E_{2,11}E_{25}E_{28}E_{1,16}E_{1,15}E_{1,13}E_{19}$ |
| 18 | $E_{1,18}E_{1,17}E_{1,15}E_{1,11}E_{13}E_{1,14}E_{19}E_{12}E_{1,16}E_{1,13}E_{17}E_{16}E_{18}E_{14}E_{1,12}E_{15}E_{1,10}$ |
| 20 | $E_{2,18}E_{2,15}E_{29}E_{24}E_{2,14}E_{27}E_{28}E_{26}E_{2,10}E_{1,20}E_{1,19}E_{1,17}E_{1,13}E_{15}E_{1,12}E_{13}E_{1,16}E_{1,11}$ |

| $n$ | 基本列運算矩陣 |
|---|---|
| 22 | $E_{5,14}E_{38}E_{3,13}E_{2\cdot 20}E_{2,17}E_{2,11}E_{1,22}E_{1,21}E_{1,19}E_{1,15}E_{17}E_{1,10}E_{14}E_{1,16}E_{19}E_{16}E_{1,12}$ |
| 24 | $E_{4,18}E_{4,11}E_{1,24}E_{1,23}E_{1,21}E_{1,17}E_{19}E_{18}E_{1,10}E_{16}E_{1,14}E_{13}E_{1,20}E_{1,15}E_{15}E_{1,16}E_{17}E_{1,12}E_{12}E_{1,22}E_{1,19}E_{1,13}$ |
| 26 | $E_{1,26}E_{1,25}E_{1,23}E_{1,19}E_{1,11}E_{16}E_{1,16}E_{15}E_{1,18}E_{19}E_{1,10}E_{18}E_{1,12}E_{14}E_{1,20}E_{1,13}E_{12}E_{1,24}E_{1,21}E_{1,15}E_{13}E_{1,22}E_{1,17}E_{17}E_{1,14}$ |
| 28 | $E_{3,24}E_{3,19}E_{39}E_{3,12}E_{36}E_{3,18}E_{37}E_{3,16}E_{2,26}E_{2,23}E_{2,17}E_{25}E_{2,20}E_{2,11}E_{28}E_{2,14}E_{1,28}E_{1,27}E_{1,25}E_{1,21}E_{1,13}E_{14}E_{1,22}E_{1,15}$ |
| 30 | $E_{1,30}E_{1,29}E_{1,27}E_{1,23}E_{1,15}E_{12}E_{1,28}E_{1,25}E_{1,19}E_{17}E_{1,18}E_{15}E_{1,22}E_{1,13}E_{14}E_{1,24}E_{1,17}E_{13}E_{1,26}E_{1,21}E_{1,11}E_{1,10}E_{1,12}E_{18}E_{1,16}$ |

## 目標一：求固定點

**定理一**：在對 2 取同餘的洗牌規則下，當 $n=3p-2$ or $n=3p-1, p\in even$， $p$ 為固定點。

<觀察>：由根據牌的張數不同執行洗牌動作的結果觀察發現當 $n$=4, 5, 10, 11, 16, 17, 22, 23⋯時，會分別有 2, 4, 6, 8, ⋯在同一個位置，且當 $n$ 是奇數時， $n$ 會留在同一個位置。

| $n$ | 原牌序 | 一次完整洗牌後的牌序 | $p$ |
|---|---|---|---|
| 4=3x2-2 | {1,2,3,4} | {4,2,1,3} | 2 |
| 5=3x2-1 | {1,2,3,4,5} | {4,2,1,3,5} | 2 |
| 10=3x4-2 | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {10,8,6,4,2,1,3,5,7,9} | 4 |
| 11=3x4-1 | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} | {10,8,6,4,2,1,3,5,7,9,11} | 4 |

| 牌號 | 牌序 |
|---|---|
| $2k$ | 1 |
| $2k-2$ | 2 |
| ⋮ | ⋮ |
| 4 | $k-1$ |
| 2 | $k$ |
| 1 | $k+1$ |
| 3 | $k+2$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $2k-3$ | $2k-1$ |
| $2k-1$ | $2k$ |

**定理二**在洗牌規則對 2 取同餘下，則
(1)當一個偶數 $p$ 有固定點 $r$， $p+1$ 也會有一個固定點 $r$。
(2)當 $n=2k$ 時，奇數不會有固定點。
(3)當 $n=2k+1$ 時，奇數除了 $2k+1$ 不會有固定點。
(4)每個偶數皆可為兩個數字的固定點。

**定理三**在洗牌規則對 3 取同餘下，當 $n=12r-3, r\in\mathbb{N}$ 時，有一固定點為 $3r$。

**定理四**在洗牌規則對 $p$ 取同餘下， $p=2r, r\in\mathbb{N}$，當 $n=p^2+py-p+z, y\in\mathbb{N}, 0\le z\le p-1, z\in\mathbb{Z}$ 時，有一固定點為 $py$。

<說明>

例 1： $p=4$

| N | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | 4 | 2 | 1 | 3 | |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 |

例 2: $r=1, n=9, 3r=3$ ． $r=2, n=21, 3r=6$

| n | cycle | order |
|---|---|---|
| 9=12x1-3 | [1, 4, 5, 8, 7, 6, 2, 9] [3] | [8,1] = 8 |
| 21=12x2-3 | [1, 8, 19, 14, 17, 16, 13, 12, 4, 9, 5, 20, 15, 3, 7, 10, 11, 18, 2, 21][6] | [20,1] = 20 |

例 3: 當 $r=2, y=1$ 時， $p=4$, $p-1=3$, $0\le x\le 3$, $n=p^2+py-p+z, 16\le n\le 19$
計算後得對 4 取同餘時，n 為 16, 17, 18, 19 的 cycle 如下，皆有固定點 4:

| N | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|
| cycle | [1, 5, 6, 11, 15, 16][2, 12] [3, 13, 8][4][7, 14, 9][10] | [1, 5, 6, 12, 2, 13, 8, 3, 14, 10, 11, 16][4][7, 15, 17, 9] | [1, 5, 6, 13, 8, 3, 15, 18, 10, 12, 2, 14, 11, 17, 9, 7, 16][4] | [1, 5, 6, 13, 8, 3, 15, 18, 10, 12, 2, 14, 11, 17, 9, 7, 16] [4][19] |

## 目標 2：求 n 張牌洗 n 次回到初始牌序

**定理五**當對 n 取同餘時， $n=2k$ 特徵方程式循環數為 $2n$， $n=2k+1$ 特徵方程式循環數為 $4n$。

| $k$ | 1 | 2 | 3 | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $n=2k$ | 4 | 8 | 12 | $2n$ |
| $n=2k+1$ | 12 | 20 | 28 | $4n$ |

**程式計算推廣到更大數**

藉由電腦程式算出，當我們以「對 mode 取餘數」的規則下洗牌數為 n 張的牌時，需要洗 k 次才會回到原本的順序，我們將此稱為洗牌循環數，並試著從中發現規律。

規則「對 2 取同餘」的特徵方程式

| $n$ | 特徵方程式 | $\det[T_k]$ |
|---|---|---|
| 2 | $\lambda^2-1=0$ | -1 |
| 3 | $(\lambda-1)(\lambda^2-1)=0$ | 1 |
| 4 | $(\lambda-1)(\lambda^3-1)=0$ | 1 |
| 5 | $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^3-1)=0$ | -1 |
| 6 | $\lambda^6-1=0$ | -1 |
| 7 | $(\lambda-1)(\lambda^6-1)=0$ | 1 |
| 8 | $(\lambda^4-1)(\lambda^4-1)=0$ | 1 |

規則「對 3 取同餘」的特徵方程式

| $n$ | 特徵方程式 | $\det[T_k]$ |
|---|---|---|
| 3 | $\lambda^3-1=0$ | -1 |
| 4 | $\lambda^4-1=0$ | -1 |
| 5 | $\lambda^5-1=0$ | -1 |
| 6 | $(\lambda^4-1)(\lambda-1)^2=0$ | -1 |
| 7 | $(\lambda^6-1)(\lambda-1)=0$ | 1 |
| 8 | $(\lambda^5-1)(\lambda^2-1)(\lambda-1)=0$ | -1 |

**定理六**
1. 在洗牌規則「對 2 取同餘」時，觀察張數為 2 的冪次時，洗牌數為首項為 2，公差為 1 的數列。
2. 當規則為「對 $p$ 取同餘」時，且 $p$ 為奇數，其洗牌數第二項皆為第一項加一。
3. 當規則為「對 $p$ 取同餘」，其中 $p=2r, r\in\mathbb{N}$，牌數為 $n=pk+p-2, k\in\mathbb{N}$ 時，洗牌數會跟 $n=pk+p-1$ 一樣。

1. 對 2 取同餘

| n | Order |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 4 | 3 |
| 8 | 4 |
| 16 | 5 |

2. ex1: $p=3$

| N | Order |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |

2. ex2: $p=5$

| N | Order |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |

2. ex: $p=4$

| n | Order |
|---|---|
| 6 | 6 |
| 7 | 6 |
| 10 | 21 |
| 11 | 21 |
| 14 | 12 |
| 15 | 12 |

3. 此時 $r=2$，
可看到 $n=4k+4-2$ 及 $n=4k+4-1$ 時
其 order 一樣。

**性質:**

對第 $n$ 張牌洗牌後位置列出對二取餘數 *cycle* 的規律以及計算其 order:

(i) $n=2^k$ 時，其牌洗後的位置關係會由若干個 $k+1$ 項的 cycle 和一個「$2^k$ 除以 $k+1$ 餘數」項的 cycle 構成。

| $n$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| *cycle* | [1, 2] | [1, 3, 4][2] | [1, 5, 7, 8][2, 4, 3, 6] | [1, 9, 13, 15, 16][2, 8, 5, 11, 14][3, 10, 4, 7, 12][6] |
| Order | 2 | [3,1] = 3 | [4,4] = 4 | [5,5,5,1] = 5 |

(ii)有固定點的一般式:

$n=4+\frac{1+(-1)^k}{2}+6\times\left[\frac{k-1}{2}\right], p=\left[\frac{k+1}{2}\right]\times 2$，其中 $n$ 為有固定點的牌數，$p$ 為牌數 $n$ 張時固定點的牌，$k\in\mathbb{N}$。

| $n$ | *cycle* | Order | $n$ | *cycle* | Order |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | [1, 6, 3, 7, 9, 10][2, 5, 8][4] | [6,3,1] = 6 | 11 | [1, 6, 3, 7, 9, 10][2, 5, 8][4][11] | [6,3,1,1] = 6 |
| $n$ | *cycle* | Order | $n$ | *cycle* | Order |
| 16 | [1, 9, 13, 15, 16]<br>[2, 8, 5, 11, 14]<br>[3, 10, 4, 7, 12]<br>[6] | [5,5,5,1] = 5 | 17 | [1, 9, 13, 15, 16]<br>[2, 8, 5, 11, 14]<br>[3, 10, 4, 7, 12]<br>[6][17] | [5,5,5,1,1] = 5 |

## 討論與研究結果

<table>
<tr><td></td><td></td><td>結果</td><td>優點</td><td>缺點</td></tr>
<tr><td rowspan="2">目標1:求固定點</td><td>歸納討論</td><td>$\begin{cases} n=2k, n=3p-2 \\ n=2k+1, n=3p-1 \end{cases}$<br>( $p$ 為正偶數，且 $p$ 保持在初始位置的數)</td><td>可利用觀察找出規律，較明顯。</td><td>需列出大量數據觀察，且只能計算留在原位的數。</td></tr>
<tr><td>洗牌矩陣</td><td>發現當 $n=2k, 2k+1$ 時，兩者的特徵方程式只差一個 $(\lambda-1)$，且當 $\lambda=0$ 時(即計算 $det(T_n)$)，結果會有每四個一循環 (-1,1,1,-1)。</td><td>規則矩陣能明顯看出規則。</td><td>當張數變多時，較難表示。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">目標2:求 n 張牌洗 n 次回到初始牌序</td><td>特徵方程式</td><td><table><tr><th>$k$</th><th>$n=2k$</th><th>$n=2k+1$</th></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>12</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>20</td></tr><tr><td>$k$</td><td>$2n$</td><td>$4n$</td></tr></table></td><td>由特徵方程式可以快速的算出回到原位需要洗牌的次數。</td><td>當牌的張數越大時，行列式算法更複雜，速度較慢。</td></tr>
<tr><td>(二)基本列運算矩陣</td><td><table><tr><th>$n$</th><th>基本列運算矩陣</th></tr><tr><td>2</td><td>$E_{12}$</td></tr><tr><td>4</td><td>$E_{14}E_{13}$</td></tr><tr><td>6</td><td>$E_{16}E_{15}E_{13}E_{12}E_{14}$</td></tr><tr><td>8</td><td>$E_{26}E_{23}E_{24}E_{18}E_{17}E_{15}$</td></tr><tr><td>10</td><td>$E_{28}E_{25}E_{1,10}E_{19}E_{17}E_{13}E_{16}$</td></tr></table></td><td>較規則矩陣方便，只需要寫出基本列運算矩陣。</td><td>計算矩陣乘積的高次方不好算。</td></tr>
<tr><td>cycle</td><td>Lemma:對第 $n$ 張牌洗牌後位置列出對二取餘數 *cycle* 的規律:<br>$n=2^k$ 時，其牌洗後的位置關係會由若干個 $k+1$ 項的 cycle 和一個「$2^k$ 除以 $k+1$ 餘數」項的 cycle 構成。</td><td>利用 cycle 可以迅速得出 order 便可得知洗牌次數。</td><td>計算 cycle 較為複雜。</td></tr>
</table>

## 未來展望

1. 在計算特徵方程式中尚未找出規律，於是我們想找出特徵方程式的一般式。
2. 我們在計算不同數取同餘的 cycle 時，發現有時候會有如下(對 4 取同餘張數為 16 的 cycle 和 order)的情形，因此我們想找出有不同固定點個數的一般情況。

| | | |
|---|---|---|
| 16 | [1, 5, 6, 11, 15, 16][2, 12] [3, 13, 8] [4][7, 14, 9][10] | [6,2,3,1,3,1] = 6 |

3. 尋找所有牌回到原來位置時洗牌次數的一般式。

## 參考資料


1. 2000TRML 思考賽。取自 http://w3.yfms.tyc.edu.tw/mather/TRML/2000power.pdf
2. 矩陣的對角化(Diagonalization of Matrices)。取自 http://ind.ntou.edu.tw/~b0170/math/semester2/ch8/1-2-3.%20Matrix-Diagonization.pdf
3. 大學基礎代數第三章(李華介教授) https://math.ntnu.edu.tw/~li/algebra-html/algebra.pdf。