



回憶一下

1. 和的平方： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 。
2. 差的平方： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ 。
3. 平方差： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。



基礎練習題

1. 試利用差的平方公式： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，計算 $0.99^2 =$ _____。

答

2. 已知兩正方形，其邊長分別為 113 公分與 13 公分，試利用平方差公式：

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，計算兩正方形面積相差_____平方公分。

答

3. 已知 $a > b$ ，且 $a + b = 12$ ， $ab = 7$ ，試回答下列問題：

(1) $a^2 + b^2 =$ _____。

(2) $a - b =$ _____。

(3) $a^2 - b^2 =$ _____。

答

4. 求 $\frac{1987^2 - 2 \times 1987 \times 7 + 7^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1987^2 - 7^2} =$ _____。

答

5. 若 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \times \cdots \times (2^{256}+1) = 2^n - 1$ ，則 $n =$ _____。

答

銜接高中內容

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ 。
2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ 。
3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ 。
4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ 。

進階練習題

1. 試利用 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
展開 $(2x-3)^3 =$ _____。

答

2. 試利用 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
因式分解 $8x^3 + 27y^3 =$ _____。

答

3. 已知 $x + \frac{1}{x} = 5$, 試求下列各值 :

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ _____。(提示：將 $x + \frac{1}{x} = 5$ 兩邊平方)

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ _____。

(提示：利用 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ 計算之)

答

4. 因式分解下列各式：

(1) $(a+b)^2 - c^2 =$ _____。

(2) $16x^4 - 625 =$ _____。

(3) $x^6 - 1 =$ _____。

答

5. 展開並化簡下列各式：

(1) $(3 - 2\sqrt{2})^3 =$ _____。

(2) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) - (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) =$ _____。

答

2 因式分解



▶ 回憶一下

1. 因式分解：

將一個多項式 $f(x)$ 分解成數個多項式 $g_1(x), \dots, g_n(x)$ 的乘積，

即 $f(x) = g_1(x) \times \dots \times g_n(x)$ 。

例如： $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$ 。

$\xrightarrow{\text{因式分解}}$
 $\xleftarrow{\text{展開}}$

2. 承 1.，其中 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

⚙ 基礎練習題

1. 利用提公因式法因式分解：

(1) $(x+3)(3x+7) + (x+3) =$ _____。

(2) $(2x+1)(2x+3) - (3x-4)(2x+3) =$ _____。

(3) $(x-3)^2 + (2x+1)(3-x) =$ _____。

答

2. 利用乘法公式因式分解：

(1) $x^2 - 64 =$ _____。 (提示： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)

(2) $x^2 - 8x + 16 =$ _____。 (提示： $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$)

(3) $(2x + 3)^2 + 6(2x + 3) + 9 =$ _____。

答

3. 利用十字交乘法因式分解：

(1) $5x^2 + 8x + 3 =$ _____。

(2) $21x^2 + 22x - 8 =$ _____。

(3) $(2x + 1)^2 - 3(2x + 1) - 28 =$ _____。

答

4. 因式分解下列各式：

(1) $x^2 - 6x - ax + 6a =$ _____。

(2) $x^2 - y^2 - 2x + 1 =$ _____。

(3) $6(x+y)^2 - 5(x^2 - y^2) - (x-y)^2 =$ _____。

答

5. 因式分解 $(3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5)$
 $=$ _____。

【103 會考】

答

銜接高中內容

1. 給定 $f(x)$ 、 $g(x)$ 與 $q(x)$ 三多項式且為非零多項式。若 $f(x) = g(x)q(x)$ ，此時 $g(x)$ 與 $q(x)$ 稱為 $f(x)$ 的因式， $f(x)$ 為 $g(x)$ 與 $q(x)$ 的倍式。

2. 因式定理：

若 $ax + b$ ($a \neq 0$) 為非零多項式 $f(x)$ 之因式，則 $f(-\frac{b}{a}) = 0$ 。

進階練習題

1. 因式分解下列各式：

(1) $8x^3 - 27 =$ _____。

(2) $(x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4) - (x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 4) =$ _____。

答

2. 因式分解下列各式：

(1) $x^4 - 10x^2 + 9 =$ _____。

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 63 =$ _____。

答

3. 因式分解下列各式：

(1) $x^4 + 7x^2 + 16 =$ _____。

(2) $x^4 + 64 =$ _____。

答

4. 已知 $2x+3$ 為 $8x^2+ax+9$ 的因式，求 $a=$ _____。

答

5. 設 a 、 b 為實數，若 x^4-3ax^2+bx+4 之其中兩因式為 $2x+2$ 與 $x-2$ ，

求 $a+b=$ _____。

答

3

指數律與科學記號


 回憶一下

1. 設 m 、 n 為整數， a 、 b 為實數且 $ab \neq 0$ ，則：

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

(2) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

(3) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 。

(4) $a^0 = 1$ 。

註 0^0 無意義。

2. 科學記號：將一正數表示成 $a \times 10^n$ 形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 為整數。

 基礎練習題

1. 試求下列各值：

(1) $-3^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $-4^3 + (-5)^0 + (-2)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

2. 試求下列各值：

(1) $(-3)^3 \times (-3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $(2^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $(\frac{-2}{3})^4 \times (\frac{3}{4})^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

3. 將下列各數以科學記號表示之：

(1) $0.0000123 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $12300000 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $12300 \times 10^{-16} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

4. 若 $a = 6.7 \times 10^{-7}$ ， $b = 4.5 \times 10^{-8}$ ，則：

(1) $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $a - b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

5. 若 $a = 2.6 \times 10^9$ ， $b = 2 \times 10^4$ ，則：

(1) $a \times b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $a \div b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

6. 小明在網路上搜尋水資源的資料如下：「地球上水的總儲量為 $1.36 \times 10^{18} \text{ m}^3$ ，其中可供人類使用的淡水只占全部的 0.3%。」根據他搜尋到的資料，判斷可供人類使用的淡水有 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^3$ 。

【103 會考】

答

銜接高中內容

1. 設 a 為實數， $a > 0$ 。

若 m 為整數， n 為大於 1 之正整數，則：

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 。

(2) $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 。

2. 設 m 、 n 、 a 、 b 均為實數，且 $a > 0$ ， $b > 0$ ，則：

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

(2) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

(3) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 。

(4) $a^0 = 1$ 。

進階練習題

1. 試求下列各值：

(1) $3^{\frac{1}{2}}$ 。 (2) $2^{-\frac{1}{3}}$ 。 (3) $3^{\frac{2}{3}}$ 。 (4) $3^{\frac{3}{2}}$ 。

答

2. 試求下列各值：

(1) $(\frac{4}{9})^{-\frac{3}{2}}$ 。 (2) $\frac{5^{-0.3} \times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}}$ 。

答

3. (1) 已知 $a^{\frac{3}{2}} = 27$ ，求 $a =$ _____。

(2) 已知 $8^b = 729$ ，求 $4^{-b} =$ _____。

答

4. 若 a 為實數，且 $a > 0$ ，且已知 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 10$ ，試求下列之值：

(1) $a + a^{-1} =$ _____。

(2) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} =$ _____。

(3) $a^2 + a^{-2} =$ _____。

答

5. 試求下列各式之值：

(1) $(0.729)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{81}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ _____。

(2) $(4 + \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} (4 - \sqrt{7})^{\frac{3}{2}} =$ _____。

(3) $\sqrt{\sqrt{8}} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{64}} =$ _____。

答

4

多項式的四則運算


 回憶一下

1. 由數字和文字（如 x 、 y 、 $\cdots$ ）進行加法與乘法運算所組成的式子，稱為多項式。

註 文字符號不可出現在分母、絕對值、指數、根號中。

2. 多項式的加減運算：同類項合併。

$$\begin{aligned}\text{例如：} & (4x^2 + 5x - 2) + (-3x^2 - 3) \\ &= (4x^2 - 3x^2) + (5x) + (-2 - 3) \\ &= x^2 + 5x - 5.\end{aligned}$$

註 一般而言，沒特別說明習慣以降冪排列之。

3. 多項式的乘法運算：分配律乘開，再同類項合併。

$$\begin{aligned}\text{例如：} & (3x - 2)(2x + 5) \\ &= 6x^2 + 15x - 4x - 10 \\ &= 6x^2 + (15x - 4x) - 10 \\ &= 6x^2 + 11x - 10.\end{aligned}$$

 基礎練習題

1. 已知 $A = x^2 + 3x - 2$ ， $B = -3x^2 - 5x$ ，試化簡下列各式：

(1) $3A + B =$ _____。

(2) $A \times B =$ _____。

答

2. 展開 $(2x+1)(x-1)-(x^2+x-2)=$ _____。

【105 會考】

答

3. 展開 $(2x-3)(3x+4)=$ _____。

【108 會考】

答

4. 已知 A 、 B 兩多項式，若 $A+B=x^2+3x+5$ ， $A-B=3x^2-11x-11$ ，則多項式

$A=$ _____， $B=$ _____。

答

5. $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)^2$ 之 x^4 係數 = _____， x^9 係數 = _____，常數項 = _____。

答

銜接高中內容

1. 一個 x 的多項式常寫成 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 均為常數。
2. 除法原理：已知 $f(x), g(x)$ 為兩個多項式，且 $g(x) \neq 0$ 。
若 $f(x) \div g(x)$ 得商式為 $q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ ，則可得 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，
其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg[r(x)] < \deg[g(x)]$ 。

進階練習題

1. 設 $f(x) = 3x^5 + 4x^2 - 3x - 2, g(x) = x^2 - 2$ ，試求：
 - (1) $f(x) + 3g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (2) $2f(x) - (x+1)g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (3) $f(x) \div g(x)$ 之商式 = $\underline{\hspace{2cm}}$ ，餘式 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

2. 設 $f(x) = 4x^3 - 3x + 4, g(x) = x^2 + x - 1$ ，求 $f(x) \div g(x)$ 之商式
 $q(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，餘式 $r(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答

3. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-5$ 得商式為 $2x+3$ ，餘式為 5 ，則此多項式 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 所得之商式=_____，餘式=_____。

答

4. 已知 $f(x)$ 除以 $ax+b$ 的商式 $q(x)$ ，餘式 $r(x)$ ，試回答下列問題：

- (1) 若 $f(x)$ 除以 $(x+\frac{b}{a})$ ，則商式=_____，餘式=_____。
- (2) 若 $cf(x)$ 除以 $ax+b$ ，則商式=_____，餘式=_____。
- (3) 若 $f(\frac{x}{a})$ 除以 $x+b$ ，則商式=_____，餘式=_____。

答

5. 設有兩多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，且 $\deg[f(x)]=m$ ， $\deg[g(x)]=n$ ， $m>n$ ，則：

- (1) $\deg[f(x)+g(x)]=$ _____。
- (2) $\deg[f(x)-g(x)]=$ _____。
- (3) $\deg[f(x) \cdot g(x)]=$ _____。

答

5 不等式


 回憶一下

1. 若 $a > b$ ，則

$$(1) c > 0, \begin{cases} a+c > b+c \\ a-c > b-c \\ ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases} \circ$$

$$(2) c < 0, \begin{cases} a+c > b+c \\ a-c > b-c \\ ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases} \circ$$

2. (1) 若 $0 < a < b$ ，則 $a^2 < b^2$ 。

(2) 若 $a < b < 0$ ，則 $a^2 > b^2$ 。

(3) 若 $a < b$ ，則 a^2, b^2 無法比較。

 基礎練習題

1. 若 $-1 \leq x \leq 2$ ， $p = \frac{1}{2}(3x-1)$ ，則 p 的範圍為 _____。

答

2. 若 $-2 < a < 3$, $-1 < b < 4$, 則下列範圍為何？

(1) $2a - 3b$ 。

(2) $a^2 + b^2$ 。

(3) ab 。

(提示：利用加法喔！)

答

3. 解下列一元一次不等式：

(1) $4x + 1 \leq 4 + x$ 。

(2) $5(2x + 3) - 2x < 7(x + 5)$ 。

答

4. 解不等式 $\frac{4x-1}{3} < \frac{3x+2}{2} - \frac{1}{3}$ 。

答

5. 已知 a 為實數，且 $a < 0$ ，則 $3ax < 5a$ 之解為 _____

答

6. 老師有橘子若干顆，要分給若干個學生。若每人分 3 顆，則剩下 8 顆；若每人分 5 顆，則最後一位同學，有拿到橘子，但未達 5 顆，試問老師有橘子多少顆？學生人數共有多少人？

答

銜接高中內容

解二次不等式，讓我們舉例說明：

$$x^2 - 2x - 3 < 0,$$

① 觀察 $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ 的圖形。

利用配方法可得 $y = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 3 - 1 = (x - 1)^2 - 4$ 。

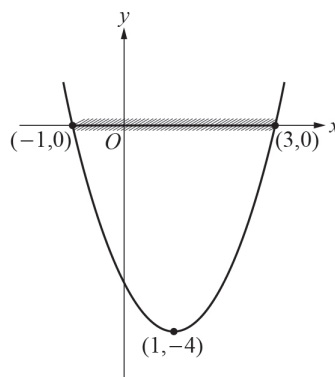
② 求出 $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ 與 x 軸之交點。

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0.$$

統整上述①②，即可畫出右邊圖形，

觀察後可發現：

- (1) 若 $-1 < a < 3$ ，則 $f(a) < 0$ 。（ x 軸下方）
- (2) 若 $a > 3$ 或 $a < -1$ ，則 $f(a) > 0$ 。（ x 軸上方）
- (3) 若 $a = 3$ 或 $a = -1$ ，則 $f(a) = 0$ 。



進階練習題

1. 解下列二次不等式：

(1) $x^2 - x - 2 < 0$ 。

(2) $-x^2 + x + 2 < 0$ 。

答

2. 解不等式 $2x^2 + 2x - 3 < 0$ 。

答

3. 解不等式 $2x^2 - 2x - 1 > 0$ 。

答

4. 解不等式 $x^2 + 6x + 9 > 0$ 。

答

5. 解不等式 $x^2 - x + 3 > 0$ 。

答



► 回憶一下

1. 若 $a \neq 0$ ，且 a 、 b 、 c 為實數， $y = ax^2 + bx + c$ 稱為二次函數，其圖形為拋物線。

2. 利用配方法：

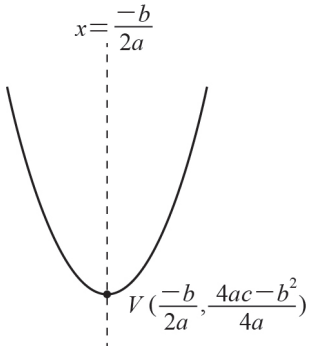
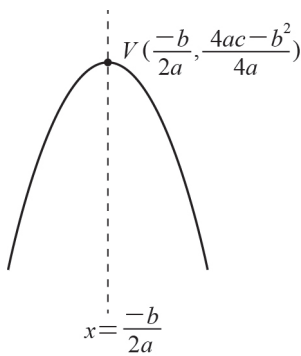
$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c - a \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}。
 \end{aligned}$$

(1) 頂點坐標 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 。

(2) 對稱軸： $x = -\frac{b}{2a}$ 。

(3) 開口方向：若 $a > 0$ ，則開口向上；若 $a < 0$ ，則開口向下。

(4) 開口大小：若 $|a|$ 愈大，開口愈小；若 $|a|$ 愈小，開口愈大。

$a > 0$	$a < 0$
	
頂點為此函數之最低點 $\Rightarrow$ 當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最小值 $= \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。	頂點為此函數之最高點 $\Rightarrow$ 當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最大值 $= \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

 基礎練習題

1. 二次函數 $y=2x^2+12x+22$ 之頂點_____，對稱軸_____，
當 $x=_____$ ， y 有最_____值為_____。

答

2. 將二次函數 $y=ax^2-6x+2$ 向左平移 3 個單位長，再向上平移 5 個單位長後，會與
 $y=-x^2+bx+c$ 的圖形重合，則 $b-c=_____$ 。

答

3. 若二次函數之對稱軸 $x=1$ ，且通過 $(-1, 6)$ ， $(2, 3)$ ，
則此二次函數為_____。

答

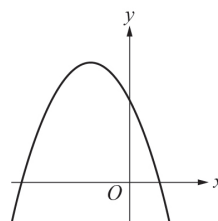
4. 已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如右，則

(1) a _____ 0。

(2) b _____ 0。

(3) c _____ 0。

(4) b^2-4ac _____ 0。



(提示)

係數	判斷法則
a	開口方向：開口向上 $\Rightarrow a > 0$ ；開口向下 $\Rightarrow a < 0$ 。
b	利用對稱軸 $x = \frac{-b}{2a}$ 的正負號。
c	與 y 軸交點坐標為 $(0, c)$ 。
b^2-4ac	與 x 軸的交點個數： 若兩個交點，則 $b^2-4ac > 0$ 。 若一個交點 (重根)，則 $b^2-4ac = 0$ 。 若沒有交點，則 $b^2-4ac < 0$ 。

答

5. 坐標平面上，某二次函數的頂點為 $(2, -1)$ ，此函數圖形與 x 軸相交於 P 、 Q 兩點，且 $\overline{PQ} = 6$ 。若此函數通過 $(1, a)$ 、 $(3, b)$ 、 $(-1, c)$ 、 $(-3, d)$ 四點，則 a 、 b 、 c 、 d 之值何者為正？

【105 會考】

答

6. 坐標平面上，二次函數 $y = -x^2 + 6x - 9$ 的圖形的頂點為 A ，且此函數圖形與 y 軸交於 B 點。若在此函數圖形上取一點 C ，在 x 軸上取一點 D ，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，則 D 點坐標為何？

【104 會考】

答

7. 已知坐標平面上有一直線 L ，其方程式為 $y + 2 = 0$ ，且 L 與二次函數 $y = 3x^2 + a$ 的圖形相交於 A 、 B 兩點；與二次函數 $y = -2x^2 + b$ 的圖形相交於 C 、 D 兩點，其中 a 、 b 為整數。若 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{CD} = 4$ ，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【107 會考】

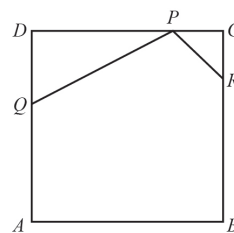
答

8. 如右圖，正方形 $ABCD$ 是一張邊長為 12 公分的皮革。

皮雕師傅想在此皮革兩相鄰的角落分別切下 $\triangle PDQ$

與 $\triangle PCR$ 後得到一個五邊形 $PQABR$ ，其中

$\overline{PD} = 2\overline{DQ}$ ， $\overline{PC} = \overline{RC}$ ，且 P 、 Q 、 R 三點分別在 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 上，如右圖所示。



(1) 當皮雕師傅切下 $\triangle PDQ$ 時，若 $\overline{DQ}$ 長度為 x 公分，請以 x 表示此時 $\triangle PDQ$ 的面積。

(2) 承(1)，當 x 的值為多少時，五邊形 $PQABR$ 的面積最大？

【105 會考】

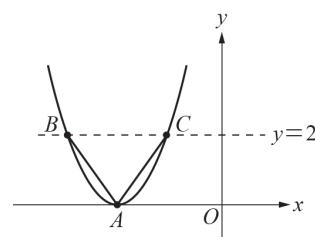
答

9. 如右圖，坐標平面上有一頂點為 A 的拋物線，

此拋物線與方程式 $y=2$ 的圖形交於 B 、 C 兩點，

且 $\triangle ABC$ 為正三角形。若 A 點坐標為 $(-3, 0)$ ，

則此拋物線與 y 軸的交點坐標為何？ 【108 會考】



答

10. 已知二次函數 $y = -x^2 + 4x + 9$ ，求在下列 x 範圍中的最大值與最小值。

(1) $0 \leq x \leq 5$

(2) $3 \leq x \leq 6$

答

解答篇



單元 1 乘法公式

簡答區

基礎練習題

1. 0.9801 2. 12600
 3. (1) 130 ; (2) $2\sqrt{29}$; (3) $24\sqrt{29}$
 4. $\frac{1}{1980}$ 5. 512

進階練習題

1. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
 2. $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
 3. (1) 23 ; (2) 110
 4. (1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
 (2) $(4x^2 + 25)(2x + 5)(2x - 5)$;
 (3) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
 5. (1) $99 - 70\sqrt{2}$; (2) $-19x^3 - 35y^3$

詳答區

基礎練習題

1. $0.99^2 = (1 - 0.01)^2$
 $= 1^2 - 2 \times 1 \times 0.01 + 0.01^2$
 $= 1 - 0.02 + 0.0001$
 $= 0.9801$ 。
 2. 大正方形面積 = 113^2 ,
 小正方形面積 = 13^2 ,
 兩正方形面積差 = $113^2 - 13^2$
 $= (113 + 13)(113 - 13)$
 $= 126 \times 100 = 12600$ 。
 3. (1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
 $= 12^2 - 2 \times 7$
 $= 144 - 14$
 $= 130$ 。

$$\begin{aligned} (2) (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 130 - 2 \times 7 \\ &= 116。 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a - b = \pm \sqrt{116} = \pm 2\sqrt{29} \text{ (取正)。$$

$$\begin{aligned} (3) a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ &= 12 \times 2\sqrt{29} \\ &= 24\sqrt{29}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \frac{1987^2 - 2 \times 1987 \times 7 + 7^2}{1980^2} &\times \frac{1994}{1987^2 - 7^2} \\ &= \frac{(1987 - 7)^2}{1980^2} \times \frac{1994}{(1987 + 7)(1987 - 7)} \\ &= \frac{1980^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1994 \times 1980} \\ &= 1 \times \frac{1}{1980} \\ &= \frac{1}{1980}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \\ \times (2^{256} + 1) \\ &= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \\ &\quad \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \\ &\quad \times (2^{256} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &= (2^8 - 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &\quad \vdots \\ &= 2^{512} - 1。 \\ \Rightarrow n &= 512。 \end{aligned}$$

進階練習題

1. $(2x - 3)^3$
 $= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times (2x) \times 3^2 - 3^3$
 $= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ 。
 2. $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$
 $= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$
 $= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ 。

$$3. (1) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25,$$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23。$$

$$\begin{aligned} (2) x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 5 \times (23 - 1) \\ &= 5 \times 22 = 110。 \end{aligned}$$

$$4. (1) (a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c]$$

$$= (a+b+c)(a+b-c)。$$

$$\begin{aligned} (2) 16x^4 - 625 &= (4x^2)^2 - 25^2 \\ &= (4x^2 + 25)(4x^2 - 25) \\ &= (4x^2 + 25)[(2x)^2 - 5^2] \\ &= (4x^2 + 25)(2x+5)(2x-5)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (1) (3-2\sqrt{2})^3 &= 3^3 - 3 \times 3^2 \times 2\sqrt{2} + 3 \times 3 \times (2\sqrt{2})^2 \\ &\quad - (2\sqrt{2})^3 \\ &= 27 - 54\sqrt{2} + 72 - 16\sqrt{2} \\ &= 99 - 70\sqrt{2}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) &- (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2) \\ &= [(2x)^3 - (3y)^3] - [(3x)^3 + (2y)^3] \\ &= (8x^3 - 27y^3) - (27x^3 + 8y^3) \\ &= -19x^3 - 35y^3。 \end{aligned}$$

單元 2 因式分解

簡答區

基礎練習題

- $(x+3)(3x+8)；$
 - $-(2x+3)(x-5)；$
 - $-(x-3)(x+4)；$
- $(x+8)(x-8)；$
 - $(x-4)^2；$
 - $4(x+3)^2$
- $(5x+3)(x+1)；$
 - $(7x-2)(3x+4)；$
 - $2(x-3)(2x+5)；$
- $(x-6)(x-a)；$
 - $(x+y-1)(x-y-1)；$
 - $2y(7x+5y)；$
- $-x^5(3x-4)(2x+1)$

進階練習題

- $(2x-3)(4x^2+6x+9)；$
 - $-4x^2(x^2+2)；$
- $(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)；$
 - $(x^2+5x+13)(x^2+5x-3)；$
- $(x^2+x+4)(x^2-x+4)；$
 - $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)；$
- 18
- $\frac{5}{3}$

詳答區

基礎練習題

- $$\begin{aligned} &(x+3)(3x+7)+(x+3) \\ &= (x+3)[(3x+7)+1] \\ &= (x+3)(3x+7+1) \\ &= (x+3)(3x+8)。 \end{aligned}$$
 - $$\begin{aligned} &(2x+1)(2x+3)-(3x-4)(2x+3) \\ &= (2x+3)[(2x+1)-(3x-4)] \\ &= (2x+3)(2x+1-3x+4) \\ &= (2x+3)(-x+5) \\ &= (2x+3)[-(x-5)] \\ &= -(2x+3)(x-5)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (x-3)^2 + (2x+1)(3-x) \\
 &= (x-3)^2 + (2x+1)[-(x-3)] \\
 &= (x-3)^2 - (2x+1)(x-3) \\
 &= (x-3)[(x-3) - (2x+1)] \\
 &= (x-3)(x-3-2x-1) \\
 &= (x-3)(-x-4) \\
 &= (x-3)[-(x+4)] \\
 &= -(x-3)(x+4) \circ
 \end{aligned}$$

$$2. (1) x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x+8)(x-8) \circ$$

$$(2) x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2 \circ$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (2x+3)^2 + 6(2x+3) + 9 \\
 &= (2x+3)^2 + 2 \times (2x+3) \times 3 + 3^2 \\
 &= [(2x+3) + 3]^2 \\
 &= (2x+6)^2 \\
 &= [2(x+3)]^2 \\
 &= 4(x+3)^2 \circ
 \end{aligned}$$

$$3. (1) 5x^2 + 8x + 3$$

$$\begin{array}{r}
 5x \quad \times \quad +3 \\
 x \quad \quad +1 \\
 \hline
 5x \quad + \quad 3x = 8x \\
 = (5x+3)(x+1) \circ
 \end{array}$$

$$(2) 21x^2 + 22x - 8$$

$$\begin{array}{r}
 7x \quad \times \quad -2 \\
 3x \quad \quad +4 \\
 \hline
 28x \quad - \quad 6x = 22x \\
 = (7x-2)(3x+4) \circ
 \end{array}$$

$$(3) \text{ 令 } A = (2x+1),$$

$$(2x+1)^2 - 3(2x+1) - 28$$

$$= A^2 - 3A - 28$$

$$\begin{array}{r}
 A \quad \times \quad -7 \\
 A \quad \quad +4 \\
 \hline
 4A \quad - \quad 7A = -3A
 \end{array}$$

$$= (A-7)(A+4)$$

$$= [(2x+1)-7][(2x+1)+4]$$

$$= (2x-6)(2x+5)$$

$$= [2(x-3)](2x+5)$$

$$= 2(x-3)(2x+5) \circ$$

$$4. (1) x^2 - 6x - ax + 6a$$

$$= (x^2 - 6x) - (ax - 6a)$$

$$= x(x-6) - a(x-6)$$

$$= (x-6)(x-a) \circ$$

$$(2) x^2 - y^2 - 2x + 1$$

$$= (x^2 - 2x + 1) - y^2$$

$$= (x-1)^2 - y^2$$

$$= (x-1+y)(x-1-y)$$

$$= (x+y-1)(x-y-1) \circ$$

$$(3) \text{ 令 } A = x+y, B = x-y,$$

$$6(x+y)^2 - 5(x^2 - y^2) - (x-y)^2 \circ$$

$$= 6A^2 - 5AB - B^2$$

$$\begin{array}{r}
 6A \quad \times \quad +B \\
 A \quad \quad -B \\
 \hline
 -6AB + AB = -5AB
 \end{array}$$

$$= (6A+B)(A-B)$$

$$= [6(x+y) + (x-y)][(x+y) - (x-y)]$$

$$= (7x+5y)(2y)$$

$$= 2y(7x+5y) \circ$$

$$5. (3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5)$$

$$+ (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)[(-x^6+3x^5) + (-2x^6+x^5)]$$

$$+ (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)[(-x^6+3x^5-2x^6+x^5)]$$

$$+ (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)(-3x^6+4x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)[- (3x^6-4x^5)] + (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= -(3x+2)(3x^6-4x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x^6-4x^5)[- (3x+2) + (x+1)]$$

$$= x^5(3x-4)(-3x-2+x+1)$$

$$= x^5(3x-4)(-2x-1)$$

$$= -x^5(3x-4)(2x+1) \circ$$

進階練習題

$$1. (1) 8x^3 - 27$$

$$= (2x)^3 - 3^3$$

$$= (2x-3)[(2x)^2 + (2x) \cdot 3 + 3^2]$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9) \circ$$

$$(2) (x^2+2)(x^4-2x^2+4)$$

$$- (x^2+2)(x^4+2x^2+4)$$

$$= (x^2+2)[(x^4-2x^2+4) - (x^4+2x^2+4)]$$

$$= (x^2+2)[x^4-2x^2+4-x^4-2x^2-4]$$

$$= (x^2+2)(-4x^2)$$

$$= -4x^2(x^2+2) \circ$$

$$2. (1) x^4 - 10x^2 + 9$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad \times \quad -9 \\
 x^2 \quad \quad -1 \\
 \hline
 -x^2 - 9x^2 = -10x^2
 \end{array}$$

$$= (x^2-9)(x^2-1)$$

$$= (x+3)(x-3)(x+1)(x-1) \circ$$

$$\begin{aligned}
 (2) & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-63 \\
 &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-63 \\
 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-63.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } A &= x^2+5x, \\
 &= (A+4)(A+6)-63 \quad \begin{array}{r} A \times +13 \\ A \quad -3 \\ \hline -3A+13A=10A \end{array} \\
 &= A^2+10A+24-63 \\
 &= A^2+10A-39 \\
 &= (A+13)(A-3) \\
 &= (x^2+5x+13)(x^2+5x-3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (1) & x^4+7x^2+16 \\
 &= (x^4+8x^2+16)-x^2 \\
 &= (x^2+4)^2-x^2 \\
 &= [(x^2+4)+x][(x^2+4)-x] \\
 &= (x^2+x+4)(x^2-x+4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & x^4+64 \\
 &= (x^4+16x^2+64)-16x^2 \\
 &= (x^2+8)^2-(4x)^2 \\
 &= [(x^2+8)+4x][(x^2+8)-4x] \\
 &= (x^2+4x+8)(x^2-4x+8).
 \end{aligned}$$

4. 〈方法1〉

$$\begin{array}{r}
 4x+3 \\
 \hline
 2x+3 \mid 8x^2+ax+9 \\
 \underline{8x^2+12x} \\
 (a-12)x+9 \\
 \underline{6x+9} \\
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a-12=6.$$

$$\therefore a=18$$

〈方法2〉

$$\text{令 } f(x)=8x^2+ax+9$$

根據因式定理， $f(-\frac{3}{2})=0$ ，

$$f(-\frac{3}{2})^2+a(-\frac{3}{2})+9=0$$

$$\Rightarrow a=18.$$

$$5. \text{ 令 } f(x)=x^4-3ax^2+bx+4,$$

根據因式定理可知：

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3a-b+4=0 \\ 16-12a+2b+4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5 \\ 6a-b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} \\ b=0 \end{cases}.$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{3}$$

單元 3

指數律與科學記號

簡答區

基礎練習題

1. (1) -134 ; (2) -47

2. (1) -243 ; (2) 64 ; (3) $\frac{1}{16}$

3. (1) 1.23×10^{-5} ; (2) 1.23×10^7 ; (3) 1.23×10^{-12}

4. (1) 7.15×10^{-7} ; (2) 6.25×10^{-7}

5. (1) 5.2×10^{13} ; (2) 1.3×10^5 6. 4.08×10^{15}

進階練習題

1. (1) $\sqrt{3}$; (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; (3) $\sqrt[3]{9}$; (4) $3\sqrt{3}$

2. (1) $\frac{27}{8}$; (2) $\frac{1}{125}$ 3. (1) 9 ; (2) $\frac{1}{81}$

4. (1) 98 ; (2) 970 ; (3) 9602

5. (1) $\frac{4}{5}$; (2) 27 ; (3) $\frac{1}{2}$

詳答區

基礎練習題

$$\begin{aligned}
 1. (1) & -3^4-7^2-\frac{2^6}{(-2)^4}=-81-49-\frac{64}{16} \\
 & =-134.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & -4^3+(-5)^0+(-2)^4=-64+1+16 \\
 & =-47.
 \end{aligned}$$

2. (1) $(-3)^3 \times (-3)^2 = (-3)^5 = -243$.

(2) $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

$$\begin{aligned}
 (3) & \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)^4 \\
 & = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

3. (1) $0.0000123 = 1.23 \times 10^{-5}$.

(2) $12300000 = 1.23 \times 10^7$.

$$\begin{aligned}
 (3) & 12300 \times 10^{-16} = 1.23 \times 10^4 \times 10^{-16} \\
 & = 1.23 \times 10^{-12}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. (1) & a+b = 6.7 \times 10^{-7} + 4.5 \times 10^{-8} \\
 & = 6.7 \times 10^{-7} + 0.45 \times 10^{-7} \\
 & = (6.7+0.45) \times 10^{-7} \\
 & = 7.15 \times 10^{-7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & a-b = 6.7 \times 10^{-7} - 4.5 \times 10^{-8} \\
 & = 6.7 \times 10^{-7} - 0.45 \times 10^{-7} \\
 & = (6.7-0.45) \times 10^{-7} \\
 & = 6.25 \times 10^{-7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (1) a \times b &= (2.6 \times 10^9) \times (2 \times 10^4) \\ &= 2.6 \times 2 \times 10^9 \times 10^4 \\ &= 5.2 \times 10^{13}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) a \div b &= (2.6 \times 10^9) \div (2 \times 10^4) \\ &= \frac{2.6 \times 10^9}{2 \times 10^4} = 1.3 \times 10^5。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. 1.36 \times 10^{18} \times 0.3\% &= 1.36 \times 10^{18} \times 0.003 \\ &= 1.36 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{-3} \\ &= 4.08 \times 10^{15}。 \end{aligned}$$

進階練習題

$$1. (1) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}。$$

$$(2) 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}。$$

$$(3) 3^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}。$$

$$(4) 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}。$$

$$\begin{aligned} 2. (1) \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}。 \end{aligned}$$

$$(2) \frac{5^{-0.3} \times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}} = \frac{5^{-3.2}}{5^{-0.2}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}。$$

$$3. (1) a^{\frac{3}{2}} = 27, \text{兩邊同時取}\frac{2}{3}\text{次方,}$$

$$\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}},$$

$$a = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9。$$

$$(2) 8^b = 729 \Rightarrow (2^3)^b = 729$$

$$\Rightarrow 2^{3b} = 3^6, \text{兩邊同時取}\frac{2}{3}\text{次方,}$$

$$\Rightarrow (2^{3b})^{-\frac{2}{3}} = (3^6)^{-\frac{2}{3}}, 2^{-2b} = 3^{-4},$$

$$(2^2)^{-b} = \frac{1}{81}, 4^{-b} = \frac{1}{81}。$$

$$4. (1) a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 10, \text{兩邊平方,}$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 100,$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 100,$$

$$a + 2 + a^{-1} = 100。 \therefore a + a^{-1} = 98$$

$$(2) a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right) \left[\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= 10 \times (a^1 - 1 + a^{-1})$$

$$= 10 \times (98 - 1) = 970。$$

$$\begin{aligned} (3) a^2 + a^{-2} &= (a^1 + a^{-1})^2 - 2 \times a^1 \times a^{-1} \\ &= 98^2 - 2 = 9604 - 2 \\ &= 9602。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (1) \text{原式} &= (0.9^3)^{-\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{9}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 0.9^{-2} \left(\frac{9}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{10}{3^2}\right)^2 \left(\frac{3^2}{5}\right) \left(\frac{3^2}{5^2}\right) \\ &= \frac{10^2 \times 3^4}{3^4 \times 5^3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= [(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})]^{\frac{3}{2}} \\ &= (4^2 - \sqrt{7}^2)^{\frac{3}{2}} = (16 - 7)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \\ &= 27。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= [(2^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{8}} (2^6)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-2} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$

單元 4 多項式的四則運算

簡答區

基礎練習題

1. (1) $4x-6$; (2) $-3x^4-14x^3-9x^2+10x$
 2. x^2-2x+1 3. $6x^2-x-12$
 4. $A=2x^2-4x-3$, $B=-x^2+7x+8$
 5. 35, 60, 1

進階練習題

1. (1) $3x^5+7x^2-3x-8$; (2) $6x^5-x^3+7x^2-4x-2$;
 (3) 商式 $=3x^3+6x+4$, 餘式 $=9x+6$
 2. $4x-4$, $5x$ 3. (1) $x-3$; (2) -13
 4. (1) $aq(x)$, $r(x)$; (2) $cq(x)$, $cr(x)$;
 (3) $q(\frac{x}{a})$, $r(\frac{x}{a})$
 5. (1) m ; (2) m ; (3) $m+n$

詳答區

基礎練習題

1. (1) $3A+B=3(x^2+3x-2)+(-3x^2-5x)$
 $=3x^2+9x-6-3x^2-5x$
 $=(3x^2-3x^2)+(9x-5x)-6$
 $=4x-6$ 。
 (2) $A \times B=(x^2+3x-2)(-3x^2-5x)$
 $=-3x^4-5x^3-9x^3-15x^2+6x^2+10x$
 $=-3x^4-(5x^3+9x^3)-(15x^2-6x^2)$
 $+10x$
 $=-3x^4-14x^3-9x^2+10x$ 。
 2. 原式 $=2x^2-2x+x-1-x^2-x+2$
 $=(2x^2-x^2)+(-2x+x-x)+(-1+2)$
 $=x^2-2x+1$ 。
 3. 原式 $=6x^2+8x-9x-12$
 $=6x^2-x-12$ 。
 4. $\begin{cases} A+B=x^2+3x+5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ A-B=3x^2-11x-11 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2A=4x^2-8x-6$
 $\Rightarrow A=2x^2-4x-3$ 。
 $\textcircled{1}-\textcircled{2}: 2B=-2x^2+14x+16$
 $\Rightarrow B=-x^2+7x+8$ 。

5. x^4 項: $1 \cdot 5x^4+2x \cdot 4x^3+3x^2 \cdot 3x^2+4x^3 \cdot 2x+5x^4 \cdot 1$
 $=5x^4+8x^4+9x^4+8x^4+5x^4$
 $=35x^4$ 。
 x^9 項: $5x^4 \cdot 6x^5+6x^5 \cdot 5x^4$
 $=30x^9+30x^9=60x^9$ 。
 常數項 $=1 \times 1=1$ 。

進階練習題

1. (1) $f(x)+3g(x)$
 $=(3x^5+4x^2-3x-2)+3(x^2-2)$
 $=3x^5+4x^2-3x-2+3x^2-6$
 $=3x^5+7x^2-3x-8$ 。
 (2) $2f(x)-(x+1)g(x)$
 $=2(3x^5+4x^2-3x-2)-(x+1)(x^2-2)$
 $=(6x^5+8x^2-6x-4)-(x^3-2x+x^2-2)$
 $=6x^5+8x^2-6x-4-x^3+2x-x^2+2$
 $=6x^5-x^3+7x^2-4x-2$ 。
 (3)
$$\begin{array}{r} 3x^3+0x^2+6x+4 \\ x^2+0x-2 \overline{) 3x^5+0x^4+0x^3+4x^2-3x-2} \\ \underline{3x^5+0x^4-6x^3} \\ 0x^4+6x^3+4x^2 \\ \underline{0x^4+0x^3+0x^2} \\ 6x^3+4x^2-3x \\ \underline{6x^3+0x^2-12x} \\ 4x^2+9x-2 \\ \underline{4x^2+0x-8} \\ 9x+6 \end{array}$$

 商式 $=3x^3+6x+4$, 餘式 $=9x+6$ 。
 2.
$$\begin{array}{r} 4x-4 \leftarrow q(x) \\ x^2+x-1 \overline{) 4x^3+0x^2-3x+4} \\ \underline{4x^3+4x^2-4x} \\ -4x^2+x+4 \\ \underline{-4x^2-4x+4} \\ +5x+0 \leftarrow r(x) \end{array}$$

 3. $f(x)=(x-5)(2x+3)+5$
 $=2x^2+3x-10x-15+5$
 $=2x^2-7x-10$ 。

$$\begin{array}{r} x-3 \\ 2x-1 \overline{) 2x^2-7x-10} \\ \underline{2x^2-x} \\ -6x-10 \\ \underline{-6x+3} \\ -13 \end{array}$$

4. 已知 $f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$ 。

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)q(x) + r(x) \\ &= \left(x + \frac{b}{a}\right)[aq(x)] + r(x)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= (ax+b)q(x) + r(x) \\ \Rightarrow cf(x) &= c(ax+b)q(x) + cr(x) \\ \Rightarrow cf(x) &= (ax+b)[cq(x)] + cr(x)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f(x) &= (ax+b)q(x) + r(x) \\ \Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right) &= \left(x + \frac{b}{a}\right)\left[q\left(\frac{x}{a}\right)\right] + r\left(\frac{x}{a}\right)。 \end{aligned}$$

5. 令 $f(x) = x^m$, $g(x) = x^n$, $m > n$,

$$\begin{aligned} (1) f(x) + g(x) &= x^m + x^n \\ \Rightarrow \deg[f(x) + g(x)] &= m。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) - g(x) &= x^m - x^n \\ \Rightarrow \deg[f(x) - g(x)] &= m。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f(x) \cdot g(x) &= x^{m+n} \\ \Rightarrow \deg[f(x) \cdot g(x)] &= m+n。 \end{aligned}$$

單元 5 不等式

簡答區

基礎練習題

1. $-2 \leq p \leq \frac{5}{2}$

2. (1) $-16 < 2a - 3b < 9$;

(2) $0 \leq a^2 + b^2 < 25$;

(3) $-8 < ab < 12$

3. (1) $x \leq 1$; (2) $x < 20$

4. $-6 < x$ 5. $x > \frac{5}{3}$

6. 學生共有 5 人，橘子有 23 顆；
學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

進階練習題

1. (1) $-1 < x < 2$; (2) $x > 2$ 或 $x < -1$

2. $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

3. $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

4. $x < -3$ 或 $x > -3$

5. 全體實數

詳答區

基礎練習題

1. $-1 \leq x \leq 2$

$$\Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow -4 \leq 3x - 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}(3x - 1) \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow -2 \leq p \leq \frac{5}{2}。$$

2. (1) $-2 < a < 3 \Rightarrow -4 < 2a < 6$ ①

$$-1 < b < 4 \Rightarrow 3 > -3b > -12$$

$$\Rightarrow -12 < -3b < 3$$
②

① + ② 得 $-16 < 2a - 3b < 9$ 。

(2) $-2 < a < 3 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 9$ ③

$$-1 < b < 4 \Rightarrow 0 \leq b^2 < 16$$
④

③ + ④ 得 $0 \leq a^2 + b^2 < 25$ 。

(3)

$a \backslash b$	-1	4
-2	2	-8
3	-3	12

ab 之值如上表，故 $-8 < ab < 12$ 。

3. (1) $4x+1 \leq 4+x$

$$\Rightarrow 4x - x \leq 4 - 1$$

$$\Rightarrow 3x \leq 3$$

$$\Rightarrow x \leq 1。$$

(2) $5(2x+3) - 2x < 7(x+5)$

$$\Rightarrow 10x + 15 - 2x < 7x + 35$$

$$\Rightarrow 8x + 15 < 7x + 35$$

$$\Rightarrow 8x - 7x < 35 - 15$$

$$\Rightarrow x < 20。$$

4. $\frac{4x-1}{3} < \frac{3x+2}{2} - \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 2(4x-1) < 3(3x+2) - 2$$

$$\Rightarrow 8x - 2 < 9x + 6 - 2$$

$$\Rightarrow 8x - 2 < 9x + 4$$

$$\Rightarrow -2 - 4 < 9x - 8x$$

$$\Rightarrow -6 < x。$$

5. $3ax < 5a$ ，同除以 $3a$ ，但 $a < 0$ ，故 $x > \frac{5}{3}$ 。6. 設學生有 x 人，則橘子共有 $(3x+8)$ 顆。

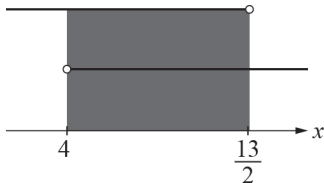
$$5(x-1) < 3x+8 < 5x，$$

$$\Rightarrow 5x - 5 < 3x + 8 < 5x，$$

$$\textcircled{1} \quad 5x - 5 < 3x + 8 \Rightarrow 2x + 13 \Rightarrow x < \frac{13}{2}。$$

$$\textcircled{2} \quad 3x + 8 < 5x \Rightarrow 8 < 2x \Rightarrow x > 4。$$

根據①且②，



$$\Rightarrow 4 < x < \frac{13}{2}$$

 $\Rightarrow x$ 可能為 5 或 6。若 $x=5$ ，則學生共有 5 人，橘子有 23 顆。若 $x=6$ ，則學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

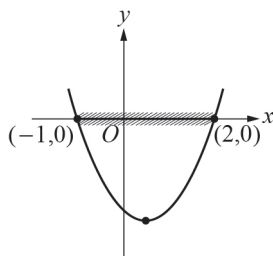
進階練習題

1. (1) $y=f(x)=x^2-x-2$

$$=(x-2)(x+1)。$$

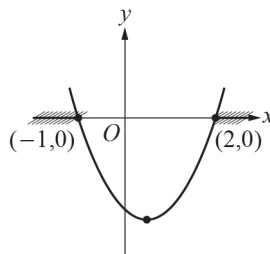
已知 $y=x^2-x-2$ 為二次函數，且 x^2 項係數為正，

所以開口向上，如下圖。

故 $-1 < x < 2$ 。

(2) $-x^2+x+2 < 0 \Rightarrow x^2-x-2 > 0$ ，

由(1)可知，如下圖。

故 $x > 2$ 或 $x < -1$ 。

2. $y=f(x)=2x^2+2x-3$ ，

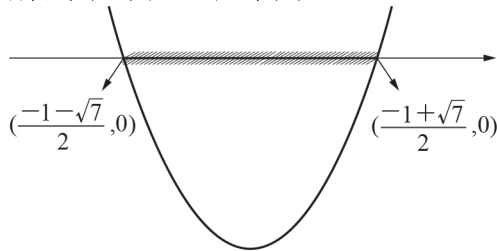
判別式 $D=4-4 \times 2 \times (-3)$

$$=4+24=28。$$

利用公式解可得 $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ ，

因為 x^2 項係數為正，

所以開口向上，如下圖，



故 $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 。

3. $y=f(x)=2x^2-2x-1$ ，

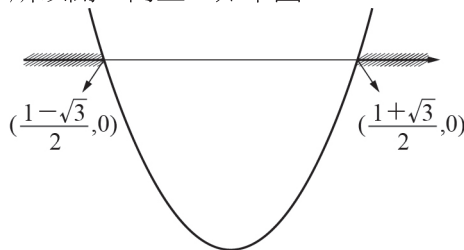
判別式 $D=(-2)^2-4 \times 2 \times (-1)$

$$=4+8=12。$$

利用公式解可得 $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ，

因為 x^2 項係數為正，

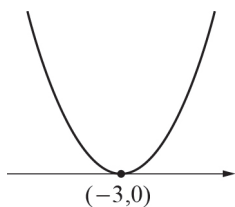
所以開口向上，如下圖，



故 $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 。

4. $y=f(x)=x^2+6x+9=(x+3)^2$ 。

如下圖可知，



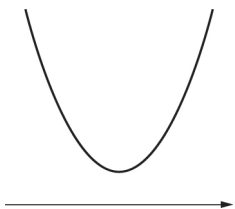
除了 $x=-3$ 以外， $f(x)>0$ ，
故 $x<-3$ 或 $x>-3$ 。

5. $y=f(x)=x^2-x+3$ ，

判別式 $D=(-1)^2-4\times 1\times 3=-11<0$ 。

由判別式 $D<0$ 可知，

該圖形與 x 軸沒有交點，如下圖，



故解為「全體實數」。

單元 6

二元函數

簡答區

基礎練習題

1. $(-3, 4)$ ， $x=-3$ ， -3 ，小，4

2. 8

3. $y=(x-1)^2+2$

4. (1) $<$ ；(2) $<$ ；(3) $>$ ；(4) $>$

5. $d>0$ 6. $D(9, 0)$ 7. 1

8. (1) x^2 ；

(2) 當 x 值為 4 時，五邊形 $PQABR$ 面積有最大值為 120 平方公分

9. $(0, \frac{27}{2})$

10. (1) 最大值 $=f(2)=13$ ，最小值 $=f(5)=4$ ；

(2) 最大值 $=f(3)=12$ ，最小值 $=f(6)=-3$

詳答區

基礎練習題

1. $y=2x^2+12x+22$

$=2(x^2+6x+9)+22-18$

$=2(x+3)^2+4$ 。

頂點為 $(-3, 4)$ ，對稱軸為 $x=-3$ 。

因 x^2 項係數為正，

故當 $x=-3$ 時， y 有最小值為 4。

2. 因為 $y=-x^2+bx+c$ 與 $y=ax^2-6x+2$

兩圖形相同，所以可知 $a=-1$ 。

$y=-x^2-6x+2=-(x+3)^2+11$ ，

由方程式可知原頂點 $(-3, 11)$ ，



向左 3，向上 5 平移

新頂點 $(-6, 16)$ ，

可知新方程式為 $y=-(x+6)^2+16$

$=-(x^2+12x+36)+16$

$=-x^2-12x-20$ 。

故 $b=-12$ ， $c=-20$

$\Rightarrow b-c=-12-(-20)=8$ 。

3. 設頂點為 $(1, k)$,

則二次函數為 $y = a(x-1)^2 + k$,

將 $(-1, 6), (2, 3)$ 代入,

$$\begin{cases} 6 = a(-1-1)^2 + k \\ 3 = a(2-1)^2 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 4a + k \\ 3 = a + k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

故二次函數為 $y = (x-1)^2 + 2$ 。

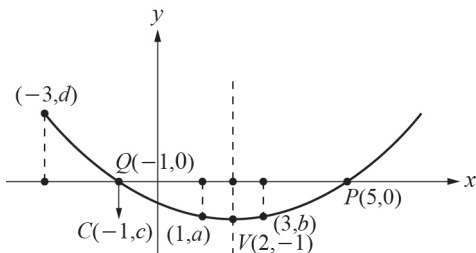
4. (1) 開口向下: $a < 0$ 。

(2) $\frac{-b}{2a} < 0$, 且 $a < 0 \Rightarrow b < 0$ 。

(3) 與 y 軸交點 $(0, c)$, 在 x 軸上方, 故 $c > 0$ 。

(4) 與 x 軸有兩個交點, 故 $b^2 - 4ac > 0$ 。

5. 由頂點 $(2, -1)$, $\overline{PQ} = 6$ 可大致畫出如下圖,



由圖形可知, $d > 0$ 。

6. $y = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$,

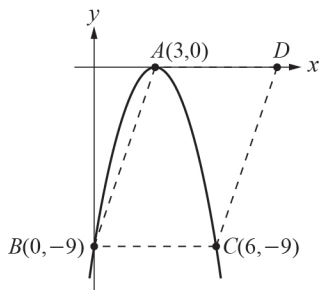
則頂點 $A(3, 0)$ 。

與 y 軸交於 B 點, 令 $x = 0 \Rightarrow y = -9$,

則 $B(0, -9)$ 。

且 D 點在 x 軸,

故可得平行四邊形圖形, 如下圖,



利用對稱性質可知, $C(6, -9) \Rightarrow D(9, 0)$ 。

$$7. \begin{cases} y = 3x^2 + a \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 3x^2 + a,$$

$$x^2 = \frac{-2-a}{3}, x = \pm \sqrt{\frac{-2-a}{3}}.$$

則 A, B 兩點坐標分別為

$$\left(\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2 \right), \left(-\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2 \right).$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{\frac{-2-a}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-2-a}{3} = 1 \Rightarrow a = -5.$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 + b \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + b = -2,$$

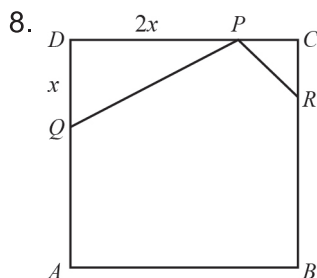
$$x = \pm \sqrt{\frac{2+b}{2}}.$$

則 C, D 兩點坐標分別為

$$\left(\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2 \right), \left(-\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2 \right).$$

$$\overline{CD} = 2\sqrt{\frac{2+b}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6.$$

故 $a + b = -5 + 6 = 1$ 。



$$(1) \triangle PDQ \text{ 面積} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2.$$

(2) 由(1)知, $\overline{PC} = 12 - 2x$,

且已知 $\overline{PC} = \overline{CR}$,

$$\therefore \triangle PCR \text{ 面積} = \frac{1}{2} (12 - 2x)^2$$

五邊形 $PQABR$ 面積

$$= \text{正方形 } ABCD \text{ 面積} - \triangle PDQ \text{ 面積} - \triangle PCR \text{ 面積}$$

$$= 144 - x^2 - \frac{1}{2} (12 - 2x)^2$$

$$= 144 - x^2 - 72 + 24x - 2x^2$$

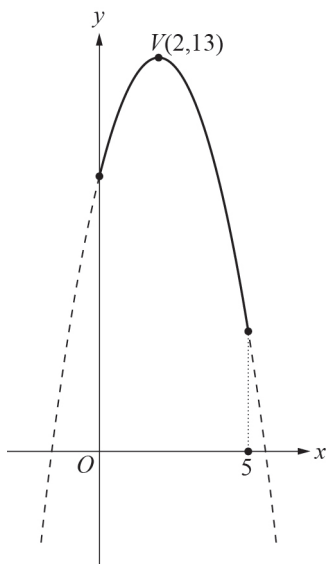
$$= -3x^2 + 24x + 72$$

$$= -3(x-4)^2 + 120.$$

故當 x 值為 4 時, 五邊形 $PQABR$ 面積有最大值 120 平方公分。

9. 設二次函數 $y = a(x+3)^2$ ，
 且已知 $\triangle ABC$ 為正三角形，令其邊長為 b ，
 則高 $= \frac{\sqrt{3}}{2}b = 2 \Rightarrow b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，
 故 $C(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$ 。
 將 $C(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$ 代入 $y = a(x+3)^2$ ，
 得 $2 = a(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 3)^2$ ， $a = \frac{3}{2}$ 。
 因此二次函數為 $y = \frac{3}{2}(x+3)^2$ ，
 令 $x=0$ ，則 $y = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$ 。
 故與 y 軸交點坐標為 $(0, \frac{27}{2})$ 。

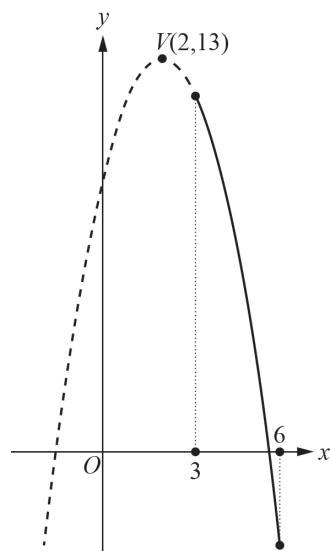
10. (1) $y = -x^2 + 4x + 9 = -(x-2)^2 + 13$ 。



圖形為實線部分。

可知最大值 $= f(2) = 13$ ，
 最小值 $= f(5) = 4$ 。

(2) 圖形為實線部分。



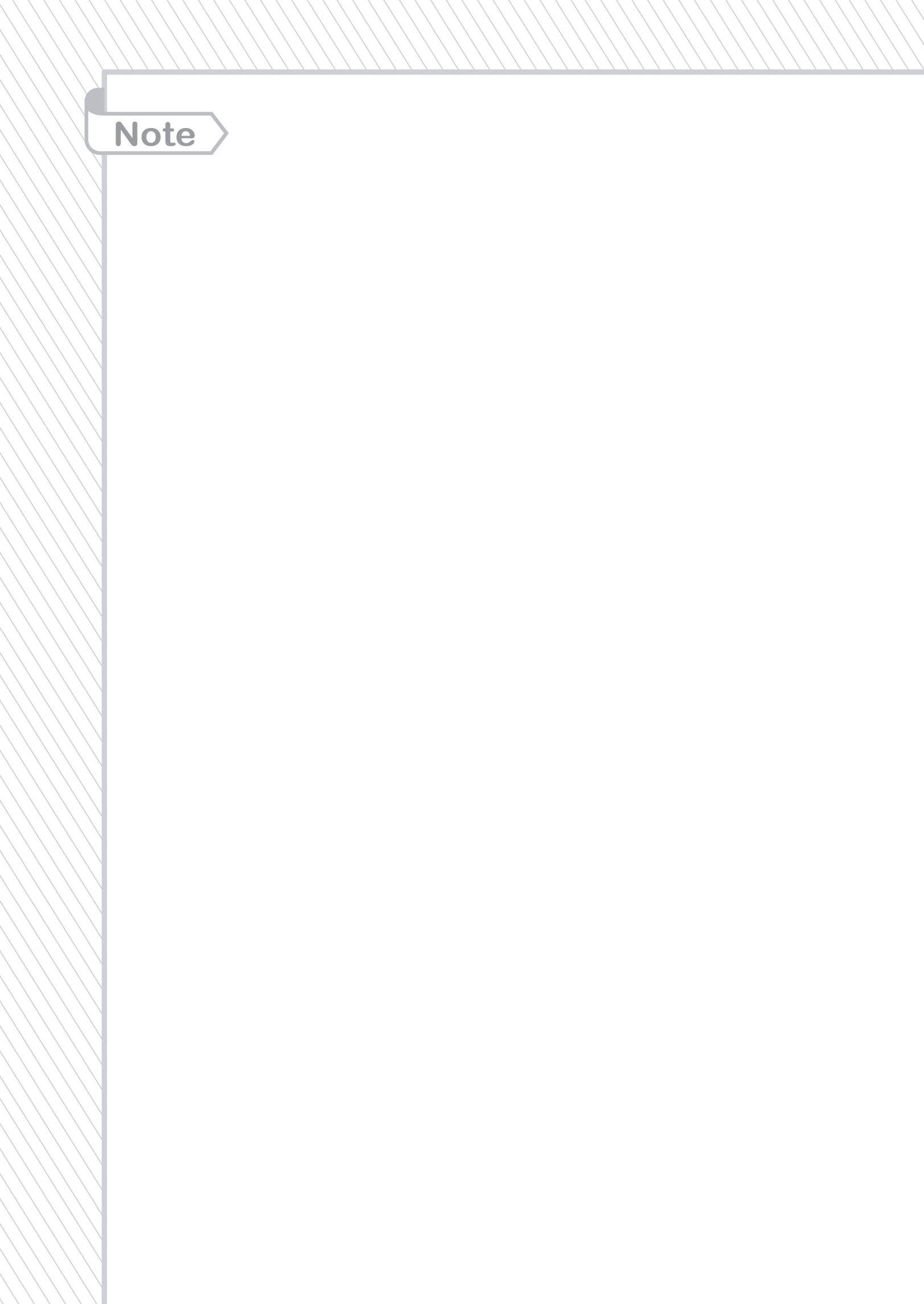
可知最大值 $= f(3) = 12$ ，
 最小值 $= f(6) = -3$ 。

Note

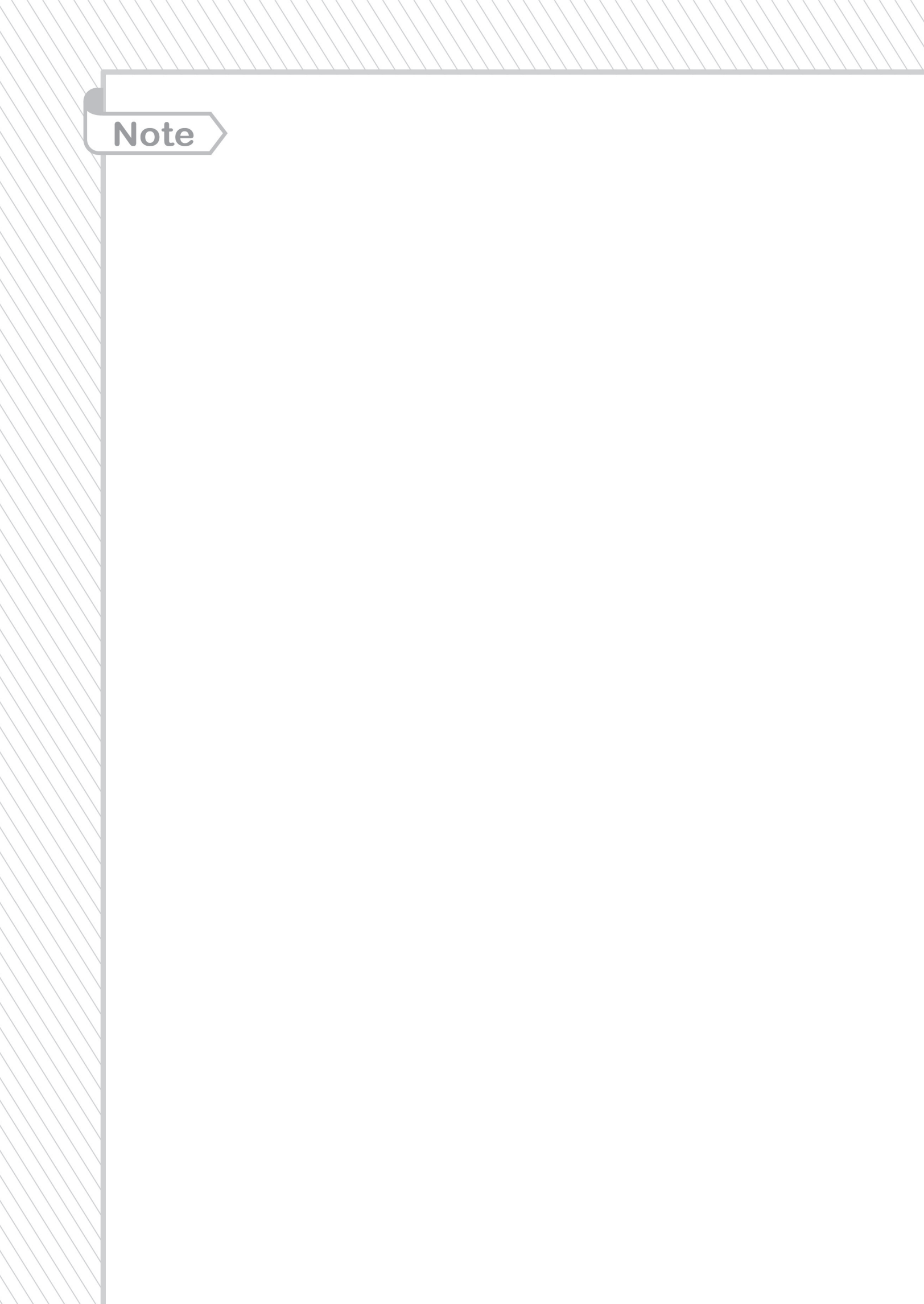
Note

Note

Note



Note



Note