單　元
1　乘法公式

國中複習

1. **運算法則**
   (1) 交換律：$a+b=b+a$；$a\times b=b\times a$。
   (2) 結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$。
   (3) 分配律：① $a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$。
   ② $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。
2. **最簡分數**
   若一個分數的分子與分母互質，則稱此分數為最簡分數。
3. **乘法公式**
   (1) 和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。
   (2) 差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。
   (3) 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。
   (4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$。
4. **公式變化**
   (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$。
   (2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$。
   (3) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$。
   (4) $(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$。
   (5) $(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$。
5. **指數律**
   設 $a\neq 0$，$b\neq 0$，m、n 為正整數，則：
   (1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。
   (2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$。
   (3) $(a^m)^n=a^{mn}$。
   (4) $(a\times b)^m=a^m\times b^m$。
6. **科學記號**
   將一個正數 a 表成 $a=b\times 10^n$ 的型式，其中 n 為整數，且 $1\leq b<10$。

基礎能力檢測

1. 已知 $15\times 16\times 17=4080$，則 $(-15)\times(-16)\times(-17)=$ <u>-4080</u>。
   解

2. 計算 $(88.8)^2-(11.2)^2=$ <u>7760</u>。
   解

3. 計算 $(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3=$ __64__ 。

解

4. 已知 $108\times25=2700$，計算 $108\times25^3-2699\times25^2=$ __625__ 。

解

5. 計算 $\dfrac{2019^2-2\times2019+1}{2018}-\dfrac{108^2+2\times108\times1911+1911^2}{2019}=$ __-1__ 。

解

6. 已知 $a-b=10$，$ab=-6$，則 $a^2+b^2=$ __88__ 。

解

7. 已知 $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=3$，則 $\dfrac{\beta+1}{\alpha}+\dfrac{\alpha+1}{\beta}=$ __12__ 。

解

8. 已知 a，b，c，d 為實數，且 $(a^2+2a+1)+(b^2+b+\frac{1}{4})+(c^2-c+\frac{1}{4})+(d^2-2a+1)=0$，

則 $a+b+c+d=$ __0__ 。

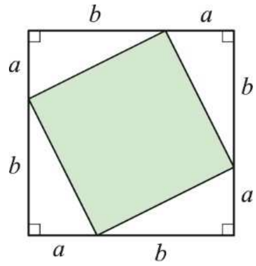
解

9. 已知 $x^2-3x+1=0$，則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ __7__ 。

解

10. 已知 $A=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$，則 A 的個位數字為何？
(A) 0　(B) 2　(C) 6　(D) 8。
答　(A)　。
解

11. 如右圖，鋪色部分的面積可以下列哪一個選項表示？
(A) a^2-b^2　(B) a^2+b^2　(C) $2ab$　(D) $2\sqrt{2}\ ab$。
答　(B)　。
解



12. 所謂「PM 2.5」是指粒徑小於 2.5 微米的細微懸浮微粒，而登革熱病毒則是直徑約 30～50 奈米的球形病毒。已知 1 微米＝10^{-6} 公尺，1 奈米＝10^{-9} 公尺，試問 2.5 微米是 50 奈米的多少倍？
(A) 5 倍　(B) 20 倍　(C) 50 倍　(D) 200 倍。
答　(C)　。
解

衔接與先修知識

衔接焦點 1　立方公式

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。
2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。
3. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。
4. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

說明：

(1) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

(2) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$
$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

(3)、(4)可直接由移項再提公因式得到。

衔接焦點 2　公式推廣

1. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$。
2. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$。
3. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$。
4. $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$。

練習 1.

已知 $a+b=5$，$ab=-3$，則：

(1) $a^2+b^2=$ __31__ 。

(2) $a^3+b^3=$ __170__ 。

練習 2.

已知 $a-b=3$，$ab=1$，則：

(1) $a^2+b^2=$ __11__ 。

(2) $a^3-b^3=$ __36__ 。

練習 3.

已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，則：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ __7__ 。

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ __18__ 。

練習 4.

已知 $x-\dfrac{1}{x}=5$，則：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ __27__ 。

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=$ __140__ 。

銜接與先修能力檢測

1. 已知 $a=99$，$b=1$，則 $a^3+b^3=$ <u>970300</u>。
解

2. 已知 $a-b=5$，$ab=3$，則 $a^4b-ab^4=$ <u>510</u>。
解

3. 已知 $a+b=3$，$ab=1$，則 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=$ <u>18</u>。
解

4. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，則 $x^5+\dfrac{1}{x^5}=$ <u>123</u>。
解

5. 已知 $a^2+\dfrac{1}{a^2}=3$，則 $a^6+\dfrac{1}{a^6}=$ <u>18</u>。
解

6. $2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ 之值為 $\underline{\quad 1023 \quad}$。

解

7. $3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5$ 之值為 $\underline{\quad 665 \quad}$。

解

8. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^4。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 9。

答 $\underline{\quad (D) \quad}$。

解

乘法公式綜合能力檢測

1. 小於 $(99.8)^2$ 的最大整數為下列何者？

(A) 9990 (B) 9980 (C) 9970 (D) 9960。

答 $\underline{\quad (D) \quad}$。

解

2. 設 a，b 為實數，若 $a+b=1$，$a^2+b^2=2$，則 $a^3+b^3=$ $\underline{\quad \frac{5}{2} \quad}$ 。

解

3. 若 a 是方程式 $x^2-4x+2=0$ 的一個解，則 $a^3+\frac{8}{a^3}=$ $\underline{\quad 40 \quad}$ 。

解

4. 若 $a-b=2+\sqrt{2}$ ，$b-c=2-\sqrt{2}$ ，則 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 之值為下列何者？
(A) 14　(B) 28　(C) $4\sqrt{6}+4$　(D) $4\sqrt{6}-4$。

答 $\underline{\quad (A) \quad}$ 。

解

5. 已知 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$，若 $\alpha^n-\beta^n=0$，其中 n 為正整數，試說明 $\alpha=\beta$。

解

因為 $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$

所以 $\alpha^n-\beta^n=0 \;\Rightarrow \alpha-\beta=0$ 或 $\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}=0$

又 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$ ，因此 $\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}>0$ 恆成立

因此 $\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}\neq 0$

故 $\alpha-\beta=0$ ，即 $\alpha=\beta$ ，得證。

單　元
2

根式運算

國中複習

1. **平方根**

已知$a \geq 0$，則 $x^2=a$ 表示

(1) a 是 x 的平方。

(2) x 是 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$ 。

2. **根式**

(1) $\sqrt[2]{a}$ 稱為二次方根，可省略「2」簡寫為$\sqrt{a}$ 。

(2) $\sqrt[n]{a}$ ：其中稱 n 為開方次數，稱 a 為被開方數，稱 $\sqrt[n]{a}$ 為 a 的 n 次方根。

(3) 二次根式 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\text{，當 } a \geq 0\text{。} \\ -a\text{，當 } a<0\text{。} \end{cases}$

(4) 若 a 為完全平方數，則 $\sqrt{a}$ 必為整數。

(5) 若 $a=m^2\times k$，則 $\sqrt{a}=\sqrt{m^2\times k}=m\sqrt{k}$ ，其中 $m>0$ 且 $k>0$。

(6) $\sqrt[3]{a^3}=a$。

(7) 當 n 為奇數，則 $\sqrt[n]{a^n}=a$；

當 n 為偶數，則 $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ 。

3. **同類方根**

例如 $3\sqrt{2}$，$6\sqrt{2}$ 皆有「$\sqrt{2}$」，稱之為同類方根，可以加減乘除。

4. **同次方根**

例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{11}$ 皆為「二次方根」，可乘除，不可加減。

5. **根式的乘除**

(1) 若 a，b 為正數或 0，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 。

(2) 若 a，b 為任意實數，則 $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$ 。

(3) 若 $a \geq 0$，$b>0$，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 。

(4) 若 a，b 為任意實數，其中 $b\neq0$，則 $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 。

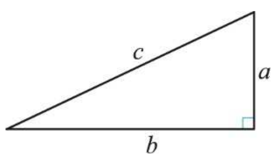
6. **畢氏定理**

一個直角三角形兩股長分別為 a、b，斜邊為 c，則 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ，如圖(一)。

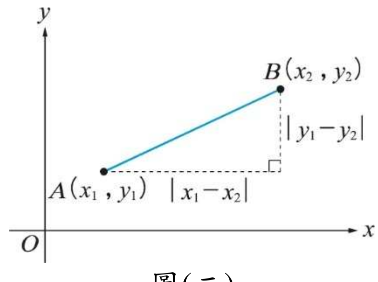
7. **距離公式**

在直角坐標平面上，已知 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，

則 A、B 兩點的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ，如圖(二)。



圖(一)



圖(二)

8. **根式分母有理化：當式子有意義時：**

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ 。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ 。

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ 。

(4) $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$ 。

基礎能力檢測

1. 若 $x^2-12x+45$ 的平方根為±3，則 $x=$ <u>6</u> 。

解

2. 化簡 $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}=$ <u>$2\sqrt{3}$</u> 。

解

3. 化簡 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{9}\times\sqrt{10}=$ <u>720</u> 。

解

4. 已知 $a=2\sqrt{6}$ ，$b=3\sqrt{3}$ ，$c=4\sqrt{2}$ ，下列哪一個選項是正確的？
(A) $a>b>c$ (B) $b>c>a$ (C) $c>a>b$ (D) $c>b>a$。

答 <u>(D)</u> 。

解

5. 若 n 為正整數且 $\sqrt{108-n}$ 亦為正整數，則符合條件的 n 有 <u>10</u> 個。

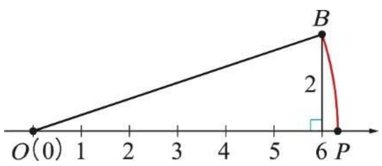
解

6. 若 n 為正整數且 $\sqrt{108\times n}$ 亦為正整數，則符合條件的最小 n 值為__3__。
解

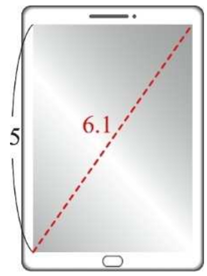
7. 已知$-3<a<1$，則 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$ 等於下列哪一個選項？
(A) 4　(B) -4　(C) $2a+2$　(D) $-2a-2$。
答　__(A)__。
解

8. 求值：$\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=$__$\sqrt{2}+2$__。
解

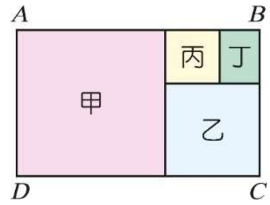
9. 如右圖，以 O（0）為圓心，$\overline{OB}$ 為半徑畫弧，交數線於點 P，則點 P 的坐標為下列何者？
(A) $4\sqrt{5}$　(B) $3\sqrt{6}$　(C) $2\sqrt{10}$　(D) $\sqrt{38}$。
答　__(C)__。
解



10. 已知有一最新手機號稱為 6.1 吋螢幕（即對角線長 6.1 吋），若螢幕長度為 5 吋，則螢幕寬度大約為多少吋？
(A) 2 吋　(B) 2.5 吋　(C) 3 吋　(D) 3.5 吋。
答　__(D)__。
解

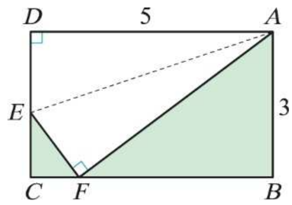


11. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中，甲、乙、丙皆為正方形，若乙的面積為 6，丙的面積為 2，則長方形 $ABCD$ 的面積為 $\underline{\quad 14+6\sqrt{3} \quad}$。



解

12. 如右圖，$ABCD$ 為長方形，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$。今若將頂點 D 摺起與 $\overline{BC}$ 邊上的點 F 重合，則摺痕 $\overline{AE}$ 的長度為 $\underline{\quad \dfrac{5\sqrt{10}}{3} \quad}$。



解

銜接與先修知識

銜接焦點 1　雙重根式的化簡

已知 $a \geq b \geq 0$，則：

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$。

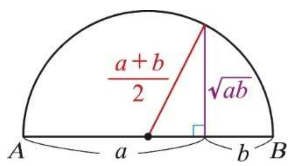
說明：

已知 $a \geq b \geq 0$，則：

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|=\sqrt{a}-\sqrt{b}$。

銜接焦點 2　算幾不等式



若 a，b 為非負實數，則有 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$，當 $a=b$ 時，等號成立。

說明：

(1) $\dfrac{a+b}{2}$ 稱為 a 與 b 的算術平均數，$\sqrt{ab}$ 稱為 a 與 b 的幾何平均數。

(2) 考慮 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$。

練習 1.

化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \underline{\quad \sqrt{2}+1 \quad}$。

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \underline{\quad \sqrt{2}-1 \quad}$。

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} = \underline{\quad 2\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad}$。

(4) $\sqrt{14-\sqrt{96}} = \underline{\quad 2\sqrt{3}-\sqrt{2} \quad}$。

練習 2.

化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \underline{\quad \sqrt{3}+1 \quad}$。

(2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \underline{\quad \sqrt{3}-1 \quad}$。

(3) $\sqrt{18+6\sqrt{5}} = \underline{\quad \sqrt{15}+\sqrt{3} \quad}$。

(4) $\sqrt{14-\sqrt{180}} = \underline{\quad 3-\sqrt{5} \quad}$。

練習 3.

(1) 已知 $x>0$，$y>0$ 且 $x+y=8$，則 xy 的最大值為 $\underline{\quad 16 \quad}$。

(2) 已知 $x>0$，$y>0$ 且 $xy=16$，則 $x+y$ 的最小值為 $\underline{\quad 8 \quad}$。

練習 4.

(1) 已知 $x>0$，$y>0$ 且 $x+2y=8$，則 xy 的最大值為 $\underline{\quad 8 \quad}$。

(2) 已知 $x>0$，$y>0$ 且 $xy=27$，則 $3x+y$ 的最小值為 $\underline{\quad 18 \quad}$。

銜接與先修能力檢測

1. 化簡根式 $\dfrac{6}{\sqrt{7+\sqrt{40}}}=$ $\underline{\quad 2\sqrt{5}-2\sqrt{2} \quad}$ 。

解

2. 化簡雙重根式 $\sqrt{6-\sqrt{20}}=$ $\underline{\quad \sqrt{5}-1 \quad}$ 。

解

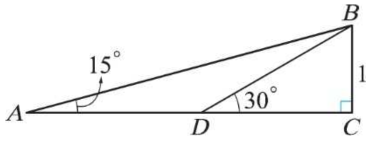
3. 若 $\sqrt{14+4\sqrt{10}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $b=$ $\underline{\quad \sqrt{10}-3 \quad}$ 。

解

4. 若 $\sqrt{35-10\sqrt{10}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $b=$ $\underline{\quad 4-\sqrt{10} \quad}$ 。

解

5. 如右圖，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=15^\circ$，$\angle BDC=30^\circ$，若 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{AB}$ $=$ $\underline{\quad \sqrt{6}+\sqrt{2} \quad}$ 。



解

6. 已知 x，y 都是正數且 $xy=32$，則 x^2+y^2 的最小值為 __64__ 。

解

7. 有一長方形，其周長為 12，則此長方形的面積最大值為 __9__ 。

解

8. 有一長方形，其面積為 24，則此長方形的周長最小值為 __$8\sqrt{6}$__ 。

解

根式運算綜合能力檢測

1. 若 a 為正整數，且 $\sqrt{108} \leq \sqrt{a} < 15$，則滿足條件的 a 有 __117__ 個。

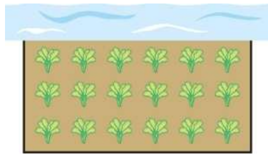
解

2. 下列哪一個整數與 $\sqrt{2025+\sqrt{114}}$ 最接近？
(A) 44 (B) 45 (C) 46 (D) 47。

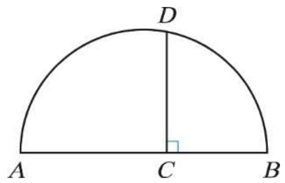
答 __(B)__ 。

解

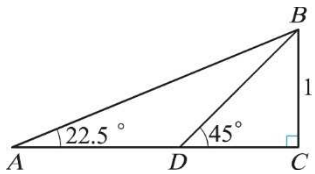
3.　小英有一綑繩子，總長為 20 公尺，想在河邊圍出一個長方形菜園種香菜，河邊不必圍繩子，僅圍其餘三邊，則小英的菜園面積最大為 <u>50</u> 平方公尺。



4.　右圖是一個半圓，$\overline{AB}$ 為直徑，點 C 在 $\overline{AB}$ 上，點 D 在圓弧上，且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$。已知 $\overline{AB}=3+2\sqrt{2}$，$\overline{BC}=4$，則 $\overline{CD}=$ ＿＿＿＿＿＿＿。



5.　如右圖，$\angle C=90°$，$\angle A=22.5°$，$\angle BDC=45°$，若 $\overline{BC}=1$，則 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 的值為＿＿＿＿＿＿＿。



單　元
3

數列與級數

國中複習

1. **數列**
將一群數排成一列稱為數列，即 a_1，a_2，a_3，……，a_n，其中 a_1 為首項，a_n 為末項，此數列共有 n 項。

2. **等差數列**
有一個數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，若滿足 $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots\ldots=a_n-a_{n-1}$（通常令此差距為 d，稱為公差），則稱數列為等差數列。

3. **等差數列的第 n 項**
一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則此數列的第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

4. **等差中項**
若 a，b，c 三數依序成等差數列，則 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

5. **級數**
將一數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ 用加號「＋」連結起來稱為級數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$。

6. **等差級數**
將一等差數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 用加號「＋」連結起來稱為等差級數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$。

7. **等差級數的和**
(1)一個等差級數共有 n 項，首項為 a_1，公差為 d，則此等差級數和為 $S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$。
(2)一個等差級數共有 n 項，首項為 a_1，末項為 a_n，則此等差級數和為 $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$。

8. **等比數列**
有一個數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，若滿足 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\ldots\ldots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$（通常令此比值為 r，稱為公比），則稱數列為等比數列。

9. **等比中項**
若 a，b，c 三數依序成等比數列，則 b 稱為 a，c 的等比中項且 $b=\pm\sqrt{ac}$。

基礎能力檢測

1. 等差數列 $\{a_n\}$ 如下：100，98，96，94，……，則此數列的第 36 項為__30__。
解

2. 等差數列$\{a_n\}$：-50，……，50，總共有 51 項，則此數列的公差為__2__。
解

3. 如右圖，每一直行，每一橫列或任一對角線上的三數皆為等差數列，則 $b=$__29__。
解

a	b	c
d	9	e
3	f	-25

4. 等差數列$\{a_n\}$共有 10 項，第 2 項 $a_2=12$，第 9 項 $a_9=-2$，則此數列的所有項的和為__50__。
解

5. 等差數列$\{a_n\}$首項為-113，第 2 項為-105，則此數列自第__16__項開始為正數。
解

6. 有一直角三角形三邊長成等差數列，若此三角形周長為 24，則此三角形的面積為__24__。
解

7. 下列哪些數列是等比數列？（多選）
(A) 1，1，1，1，1　(B) 1，-1，1，-1，1　(C) -1，-1，1，1，-1
(D) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{80}$　(E) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{25}$。
答 __(A)(B)(D)__。
解

8. 已知 α，12，9 三數依序成等比數列，則 α＝__16__。

解

9. 設 $\{a_n\}$ 是一個等比數列，且 $a_2=16$，$a_3=-32$，則：

(1) 公比 r＝__-2__。

(2) 首項 a_1＝__-8__。

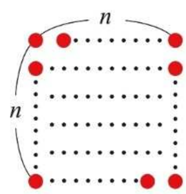
(3) 數字－2048 是此數列的第__9__項。

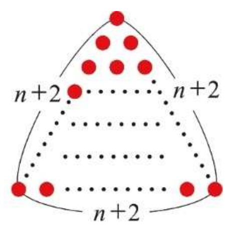
解

10. 籃球場的看臺觀眾席 D 區有 15 排座位，此區每一排都比其前一排多 1 個座位，阿哲坐在第 6 排，發現此排共有 20 個座位，則觀眾席 D 區總共有__330__個座位。

解

11. 有大小相同的球若干個，已知全部的球剛好可以排成一個每邊有 n 個球的正方形。若將全部的球改排成一個每邊 $n+2$ 個球的正三角形，也剛好用完所有的球。則可知全部的球有多少個？





(A) 36 個　(B) 64 個　(C) 100 個　(D) 144 個。

答　__(A)__。

解

12. 有一天大寶意外救了國王，國王很高興，答應給大寶一個請求。大寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 3 元，每天給的錢比前一天多 1 元，連續給 30 天。則大寶總共可以得到 465 元。

銜接與先修知識

銜接焦點 1　等比級數

將一等比數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 用加號「＋」連結起來稱為等比級數，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$。

(1) 一個等比級數共有 n 項，首項為 a_1，公比 $r\neq 1$，則此等比級數和為 $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$。

(2) 一個等比級數共有 n 項，首項為 a_1，公比為 $r=1$，則此等比級數和為 $S_n=na_1$。

說明：

(1) 公比 $r\neq 1$

$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\ldots\ldots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$ ①

$rS_n=\quad a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\ldots\ldots+a_1r^{n-1}+a_1r^n$ ②

由①－②可得（$1-r$）$S_n=a_1-a_1r^n \Rightarrow S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$。

註：$S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

(2) 公比 $r=1$，則 $S_n=a_1+a_1+a_1+\ldots\ldots+a_1=na_1$（每一項都是 a_1）。

銜接焦點 2　級數和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$

■ 級數和常以 $\sum$（唸 *sigma* 或 *summation*）來表示，即 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$。

說明：

(1) 數列的一般項為 a_k。

(2) k 之值由下標的 1 到上標 n，依序表出 a_1，a_2，a_3，……，a_n，再相加起來。

(3) 例如：$\sum_{k=1}^{5}(2k+1)=(2\times1+1)+(2\times2+1)+(2\times3+1)+(2\times4+1)+(2\times5+1)=3+5+7+9+11$

(4) 進階概念—k 可以從任何整數開始，

例如：$\sum_{k=4}^{7}(3k-2)=(3\times4-2)+(3\times5-2)+(3\times6-2)+(3\times7-2)=10+13+16+19$

練習 1.

試求下列等比級數的和：

(1) $1+2+4+8+\ldots\ldots+128=$ <u>255</u>。 (2) $2-4+8-16+\ldots\ldots+128=$ <u>86</u>。

(3) $1+3+9+27+\ldots\ldots+243=$ <u>364</u>。 (4) $3-9+27-81+\ldots\ldots+243=$ <u>183</u>。

練習 2.

以 $\sum$ 表示下列各小題的級數和：(變數為 k ，且起點從1開始)

(1) 等差級數和 $1+2+3+\ldots\ldots+100=$ $\underline{\sum_{k=1}^{100} k}$ 。

(2) 等差級數和 $1+3+5+7+\ldots\ldots+99=$ $\underline{\sum_{k=1}^{50} (2k-1)}$ 。

(3) 等比級數和 $2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^{10}=$ $\underline{\sum_{k=1}^{10} 2^k}$ 。

(4) 等差級數和 $2+4+6+\ldots\ldots+100=$ $\underline{\sum_{k=1}^{50} (2k)}$ 。

(5) 等比級數和 $3+3^2+3^3+\ldots\ldots+3^{10}=$ $\underline{\sum_{k=1}^{10} 3^k}$ 。

銜接與先修能力檢測

1. 若一等比級數的首項為 $a_1=3$，公比為 2，則其前 4 項的和為 <u>45</u>。

   解

2. 若一等比級數的首項為 $a_1=3$，公比為$-\dfrac{1}{2}$，則其前 4 項的和為 $\underline{\dfrac{15}{8}}$ 。

解

3. 以$\sum$表示級數和 $(3+5\times1)+(3^2+5\times2)+(3^3+5\times3)+\cdots\cdots+(3^{10}+5\times10)=$ $\underline{\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)}$ 。

解

4. 等比級數 $2-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{81}-\dfrac{2}{243}$ 的和為________ 。

解

5. 有一天二寶意外救了國王，國王很高興，答應給二寶一個請求。二寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 4 元，每天給的錢是前一天的兩倍，連續給 30 天，則二寶總共可得到 1073741823 元。（已知 $2^{30}=1073741824$）

數列與級數綜合能力檢測

1. 已知數列 $\{a_n\}$ 為一等差數列，若 $a_3=1$，$a_5=5$，則此數列的
   (1) 公差為 2 。
   (2) 首項為 －3 。
   (3) 第 8 項 $a_8=$ 11 。
   (4) 前 6 項的總和為 12 。
   解

2. 已知數列 $\{a_n\}$ 為一等比數列且公比大於 0，若 $a_3=20$，$a_5=5$，則此數列的

(1) 公比為 $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$。

(2) 首項為 $\underline{\quad 80\quad}$。

(3) 第 8 項 $a_8=$ $\underline{\quad\frac{5}{8}\quad}$。

(4) 前 6 項的總和為 $\underline{\quad\frac{315}{2}\quad}$。

解

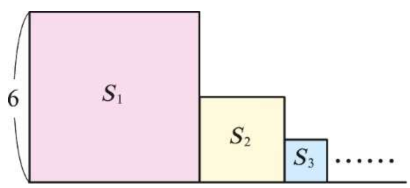
3. 級數和 $\sum_{k=1}^{4}(3^k-3k+3)$ 之值為 $\underline{\quad 102\quad}$。

解

4. 某電影院共有 15 排座位，已知每一排均比前排多 2 個座位，若第 7 排有 30 個座位，則可知電影院總共有 $\underline{\quad 480\quad}$ 個座位。

解

5. 如右圖，有一邊長為 6 公分的正方形 S_1，若以 S_1 邊長的一半為邊長作一正方形 S_2，再以 S_2 邊長的一半為邊長再作一正方形 S_3，……，依此規律繼續操作，則 S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 的面積總和為 $\underline{\quad\frac{3069}{64}\quad}$ 平方公分。



解

單　元
4

坐標與函數

國中複習

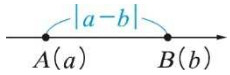
1. **數線**

任意實數 a 都可以在數線上找到它對應的位置，如圖(一)。

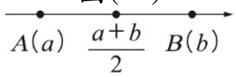
圖(一)

2. **絕對值**

若 x 為任意數，則 $|x|$ 表示 x 到原點的距離。



圖(二)



圖(三)

3. **數線上兩點距離**

若數線上 $A(a)$，$B(b)$，則 A、B 兩點的距離為 $\overline{AB}=|a-b|$，如圖(二)。

4. **數線上中點公式**

若數線上 $A(a)$，$B(b)$，則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\dfrac{a+b}{2}$，如圖(三)。

5. **平面直角坐標系**

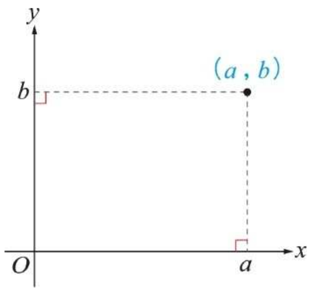
由兩條互相垂直的數線構成，平面上的所有點都有對應的坐標 $(a，b)$，其中 a 稱為 x 坐標，b 稱為 y 坐標，如圖(四)。

6. **兩點距離**

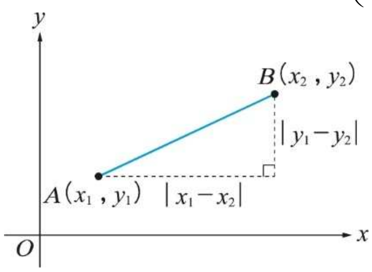
坐標平面上，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 兩點的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，如圖(五)。

7. **中點坐標**

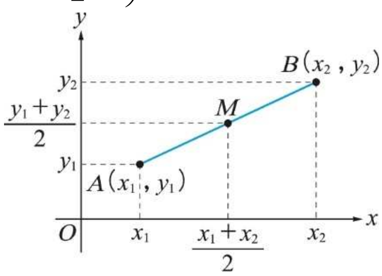
坐標平面上，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，如圖(六)。



圖(四)



圖(五)



圖(六)

8. **函數的意義**

對於每一個 x 值，都恰有一個 y 值與之對應，則稱 y 是 x 的函數，以符號 $y=f(x)$ 表示。其中稱 x 為自變數，稱 y 為應變數。

9. **函數圖形**

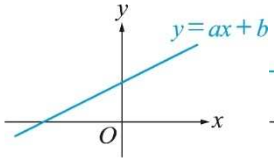
設 $y=f(x)$ 是一個函數，則在直角坐標平面上，所有這樣的點 $(x，y)$ 所構成的圖形，即為此函數 $y=f(x)$ 的圖形。

10. **線型函數圖形**

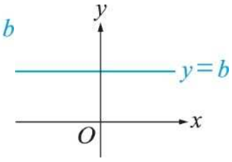
若 a，b 為實數，則 $y=f(x)=ax+b$ 稱為線型函數。

(1) 若 $a\neq 0$，則 $y=f(x)=ax+b$ 為一次函數，其圖形是一條斜直線，如圖(七)。

(2) 若 $a=0$，則 $y=b$ 為常數函數，其圖形是一條水平線，如圖(八)。



圖(七)



圖(八)

11. **二次函數的圖形**

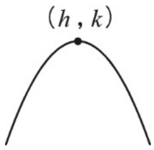
設二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$，則：

(1) $a>0$，圖形為開口向上的拋物線，頂點 (h, k) 為最低點，如圖(九)。

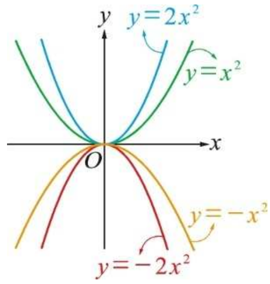
(2) $a<0$，圖形為開口向下的拋物線，頂點 (h, k) 為最高點，如圖(十)。

(3) $|a|$ 值愈大，則拋物線的開口愈小；$|a|$ 值愈小，則拋物線的開口愈大，如圖(十一)。

圖(九)



圖(十)



圖(十一)

12. **二次函數的最大值與最小值**

設二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$，

(1) $a>0$，拋物線的開口向上，則在 $x=h$ 時，y 有最小值 k。

(2) $a<0$，拋物線的開口向下，則在 $x=h$ 時，y 有最大值 k。

13. **二次函數的圖形的平移**

已知 $h>0$，$k>0$

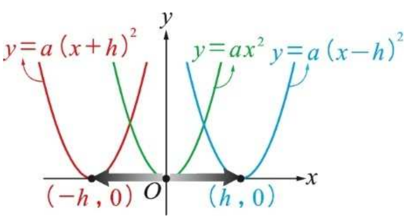
(1) 右移 h 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=a(x-h)^2$。

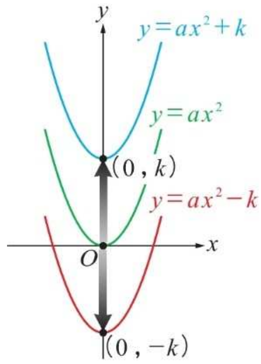
(2) 左移 h 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=a(x+h)^2$。

(3) 上移 k 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=ax^2+k$。

(4) 下移 k 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=ax^2-k$。

(5) 不論左右或上下平移，開口方向及大小都沒有改變，但是頂點位置可能會改變。



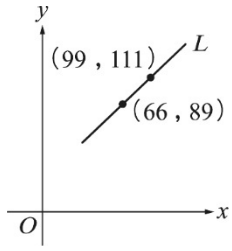


基礎能力檢測

1. 已知一次函數 $f(x)=3x-1$，則 $f(1)+f(2)+f(-3)=$ <u>　-3　</u>。

解

2. 已知 $a<0$，$b>0$，則直線 $y=ax+b$ 圖形不通過下列哪一個象限？
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。
答 __(C)__。
解



3. 如右圖，直線 L 為線型函數 $f(x)=ax+b$，則 $f(0)=$ __45__。
解

4. 若 $y=ax+b$ 的圖形是一條通過點 $(-4,3)$ 的水平直線，則數對 $(a,b)=$ __$(0,3)$__。
解

5. 直角坐標平面原點 $O(0,0)$ 到直線 L：$3x+4y-12=0$ 上的所有點的距離之中，最小距離為 __$\frac{12}{5}$__。
解

6. 已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的頂點為 $(1, 2)$，且通過點 $(3, 4)$，則此二次函數為 __$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$__。
解

7. 已知 $f(x)=-2(x-3.3)^2+4$，則下列的函數值之中哪一個最大？
(A) $f(2)$ (B) $f(3)$ (C) $f(4)$ (D) $f(5)$。
答 __(B)__
解

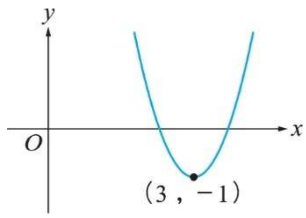
8. 已知 $f(x)=2(x-3.3)^2-4$，則下列的函數值哪一個最大？
(A) $f(2)$　(B) $f(3)$　(C) $f(4)$　(D) $f(5)$。
答　(D)
解

9. 二次函數 $y=x^2+9x-36$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點 A、B，則 $\overline{AB}$ 的長度為 15 。
解

10. 已知 $k>0$，若二次函數 $y=x^2+3$ 向右平移 k 單位可通過點 $(0,7)$，則 k 之值為 2 。
解

11. 已知由地面算起每爬升 100 公尺，氣溫就下降 0.6 度。若現在地面溫度是 20 度，阿雄在高度為 3600 公尺的山上健行，則他所在位置的氣溫應該是 -1.6 度。
解

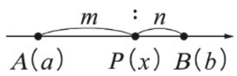
12. 右圖是二次函數 $y=2x^2+bx+c$ 的圖形，頂點坐標為 $(3,-1)$，則數對 $(b,c)=$ $(-12,17)$ 。
解



銜接與先修知識

銜接焦點 1　分點公式

數線上有相異兩點 $A(a)$，$B(b)$，若點 P 是 $\overline{AB}$ 上的分點，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，其中 m，n 皆為正實數，則點 P 的坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$。

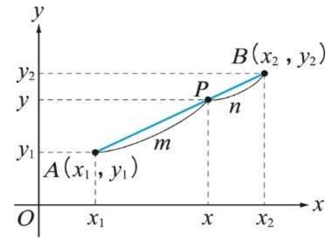


說明

(1) 假設 $a<b$，令 $P(x)$，由 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow (x-a):(b-x)=m:n \Rightarrow n(x-a)=m(b-x) \Rightarrow (m+n)x=na+mb \Rightarrow x=\dfrac{na+mb}{m+n}$。

(2) 平面上有相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 與 $B(x_2, y_2)$，若點 P 為 $\overline{AB}$ 上的分點，使得 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，分別討論 x 坐標及 y 坐標的分點公式，則可得到點 P 的坐標為 $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。



銜接焦點 2　二次函數與配方法

將二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 整理成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的型式，即是對二次函數配方，如此可知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的頂點為 (h, k)，對稱軸為 $x=h$，

其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

說明

(1) 使用配方法的步驟如下：

① x^2 項及 x 項提出係數 a，使得 x^2 項的係數為 1。

② x^2 項及 x 項配成完全平方。

③ 調整常數項。

(2) $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$

$$=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}。$$

練習 1.

(1) 數線上兩點 $A(-3)$，$B(11)$，若點 $P(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=5:2$，則 $x=$ __7__。

(2) 坐標平面上 $A(1, -3)$，$B(11, 12)$，若點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則點 P 的坐標為 __(5，3)__。

練習 2.

(1) 數線上兩點 $A(3)$，$B(-9)$，若點 $Q(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:1$，則 $x=$ __-5__。

(2) 坐標平面上 $A(-3, 2)$，$B(4, 9)$，若點 Q 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AQ}:\overline{QB}=4:3$，則點 Q 的坐標為 __(1，6)__。

練習 3.

(1) 二次函數 $f(x)=x^2+4x+3$ 的頂點為 <u>$(-2,-1)$</u>。

(2) 二次函數 $f(x)=-x^2+2x+5$ 的頂點為 <u>$(1,6)$</u>。

(3) 二次函數 $f(x)=3x^2-18x-27$ 的頂點為 <u>$(3,-54)$</u>。

(4) 二次函數 $f(x)=x^2-4x+9$ 的頂點為 <u>$(2,5)$</u>。

(5) 二次函數 $f(x)=-x^2-2x+5$ 的頂點為 <u>$(-1,6)$</u>。

(6) 二次函數 $f(x)=-2x^2-2x-2$ 的頂點為 <u>$\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$</u>。

銜接與先修能力檢測

1. 數線上兩點 $A(-5)$，$B(15)$，若點 $P(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則 $x=$ <u>3</u>。

   解

2. 數線上 $A(a)$，$B(18)$，若點 $M(-1)$ 是 $\overline{AB}$ 的中點，則 a 之值為 <u>-20</u>。

   解

3. 坐標平面上 A（1，-2），B（13，16），若點 Q 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AQ}$：$\overline{QB}$＝1：5，則點 Q 的坐標為__（3，1）__。

解

4. 坐標平面上 $A(a,-5)$，$B(3,b)$，若點 $Q(-1,2)$ 是 $\overline{AB}$ 的中點，則數對 $(a,b)=$__（-5，9）__。

解

5. 試求下列各小題中的實數數對（p，q）：

(1) $x^2+4x+3=(x-p)^2+q$，則數對（p，q）＝__（-2，-1）__。

(2) $-x^2+x-2=-(x-p)^2+q$，則數對（p，q）＝__$\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$__。

(3) $2x^2+6x-3=2(x-p)^2+q$，則數對（p，q）＝__$\left(-\frac{3}{2},-\frac{15}{2}\right)$__。

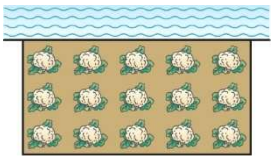
(4) $-3x^2+x+2=-3(x-p)^2+q$，則數對（p，q）＝__$\left(\frac{1}{6},\frac{25}{12}\right)$__。

解

6. 已知 $f(x)=2x^2-8x+m$ 的最小值為 160，則 $m=$__168__。
解

7. 將二次函數 $y=x^2+6x+3$ 的圖形上移 k 單位，新圖形與 x 軸恰交於一點，則 k 之值為__6__。
解

8. 小明想用 60 公尺的鐵絲網在河邊圍成一長方形的菜圃，河邊可當一邊不用鐵絲網，僅圍其餘三邊。則小明可圍成的長方形菜圃的最大面積為__450__平方公尺。



解

坐標與函數綜合能力檢測

1. 潛水夫在水面下的深度（d 公尺）與身體所承受壓力（p 個大氣壓）有下列關係 $p=k\times d+1$（其中 k 為常數），若在水面下 50 公尺，身體所承受的壓力為 5.97 個大氣壓，則在水面下 100 公尺，身體所承受的壓力為__10.94__個大氣壓。
解

2. 二次函數 $f(x)=(x-2)^2+x^2+(x+5)^2$ 的最小值為__26__。
解

3. 坐標平面上 $A(1,2)$，$B(9,-6)$，若點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=5:3$，則點 P 的坐標為<u>　$(6,-3)$　</u>。

解

4. 若二次函數 $f(x)=2x^2+4x+k$ 的圖形和 x 軸沒有交點，則實數 k 可能為下列何者？（多選）

(A)-6　(B)-3　(C) 0　(D) 3　(E) 6。

答　<u>　(D)(E)　</u>

解

5. 設 p，q，r 皆為介於 2 與 10 之間的實數，且滿足

$$\sqrt{6}\,|p-2|=\sqrt{7}\,|p-10|，\sqrt{7}\,|q-2|=\sqrt{8}\,|q-10|，\sqrt{5}\,|r-2|=\sqrt{6}\,|r-10|，$$

請比較 p，q，r 的大小，下列選項何者正確？

(A) $p>q>r$　(B) $q>r>p$　(C) $q>p>r$　(D) $r>p>q$。

答　<u>　(D)　</u>

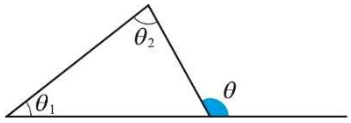
解

單　元
5

幾何與三角比

國中複習

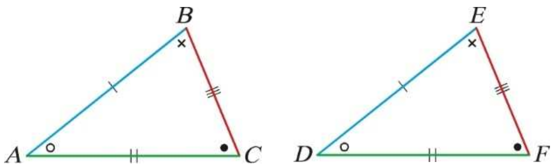
1. (1) 三角形的內角和為 180°。
   (2) 正三角形的每一內角為 60°。
   (3) 外角定理：如右圖，$\theta=\theta_1+\theta_2$。



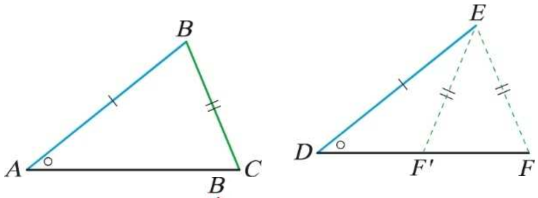
2. (1) 正 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180°$。
   (2) 正 n 邊形的任一內角為 $\dfrac{(n-2)\times180°}{n}$。

3. **三角形的邊角關係**
   在同一個三角形中：
   (1) 任意兩邊和大於第三邊，任意兩邊差小於第三邊。
   (2) 大角對大邊，小角對小邊。

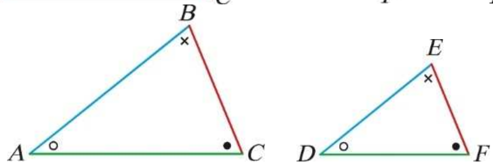
4. **三角形的全等**
   若$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，
   則兩個三角形的對應角相等且對應邊相等。



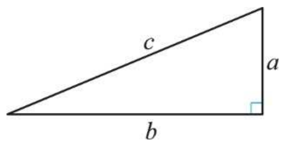
5. *SSA*
   已知兩三角形$\triangle ABC$ 與$\triangle DEF$，
   $\angle A=\angle D$ 且 $\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，
   則兩個三角形可能全等也可能不全等。



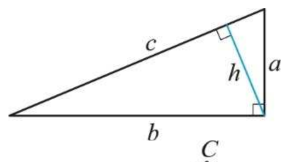
6. **三角形的相似**
   若$\triangle ABC\sim\triangle DEF$，
   則兩個三角形的對應角相等且對應邊成比例。



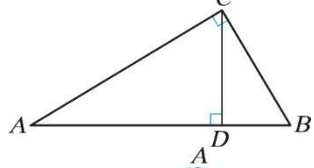
7. **直角三角形的畢氏定理**
   若直角三角形的斜邊長為 c，兩股長分別為 a，b，
   則 $c^2=a^2+b^2$。



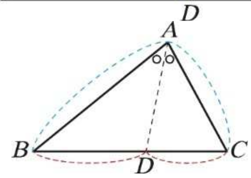
8. **直角三角形斜邊上的高**
   如右圖：斜邊上的高 $h=\dfrac{ab}{c}$。



9. **直角三角形母子相似定理**
   在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，
   則 $\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}$。

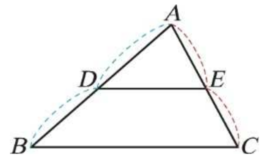


10. **內分比性質**
    在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 平分$\angle BAC$，
    則 $\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$。



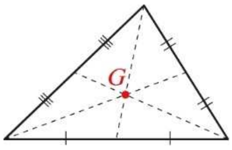
11. **平行線截三角形兩邊成比例線段性質**

如右圖，若 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$ ，則 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}=\overline{AE}$ ： $\overline{EC}$ 。

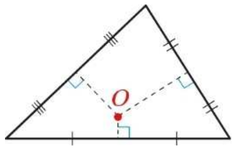


12. **三角形的心**

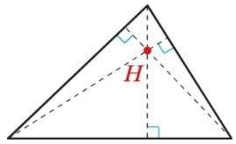
(1) 重心，如圖(一)：三中線的交點。
(2) 外心，如圖(二)：三邊中垂線的交點。
(3) 垂心，如圖(三)：三邊上高的交點。
(4) 內心，如圖(四)：三內角平分線的交點。



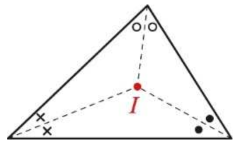
圖(一)



圖(二)



圖(三)

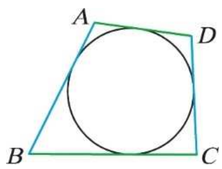


圖(四)

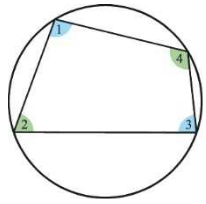
13. **圓外切四邊形**

如圖(五)，若 $ABCD$ 為圓外切四邊形，

則 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 。



圖(五)

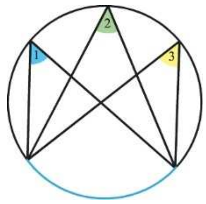


圖(六)

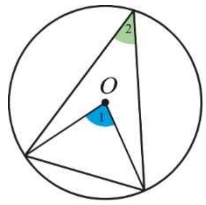
14. **圓內接四邊形對角互補**

如圖(六)，$\angle 1+\angle 3=180°$，$\angle 2+\angle 4=180°$。

15. (1) 對同弧圓周角相等，如圖(七)，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$。
(2) 對同弧圓心角是圓周角的兩倍，如圖(八)，
$\angle 1=2\angle 2$。



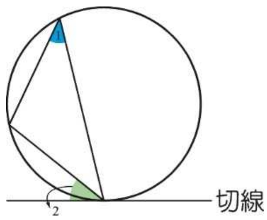
圖(七)



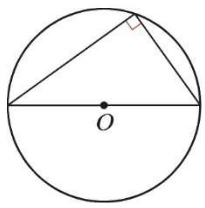
圖(八)

16. 如圖(九)，弦切角等於截弧所對圓周角 $\Rightarrow \angle 1=\angle 2$。

17. 如圖(十)，半圓內圓周角為 $90°$。



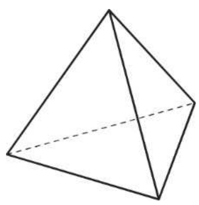
圖(九)

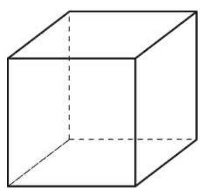


圖(十)

18. **特殊立體圖形**

(1) 正四面體，如圖(十一)。
(2) 正六面體，如圖(十二)。


圖(十一)


圖(十二)

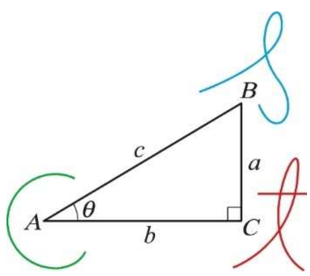
19. **三角比**

銳角的正弦、餘弦、正切

(1) $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$ $\left(\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\right)$。

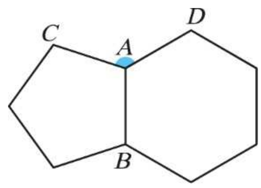
(2) $\cos\theta=\dfrac{b}{c}$ $\left(\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\right)$。

(3) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ $\left(\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\right)$。

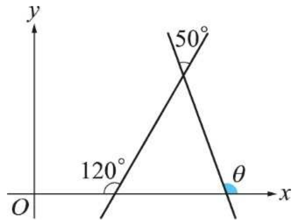


基礎能力檢測

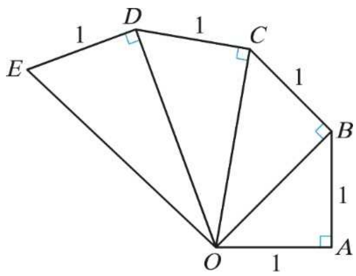
1. 如右圖，正五邊形與正六邊形有共同邊 $\overline{AB}$，則∠CAD 的度數為__132__度。
解



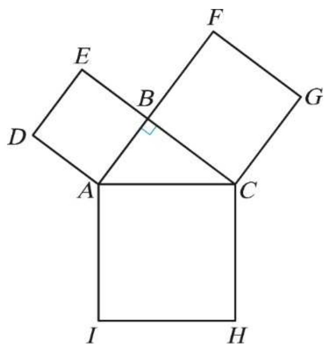
2. 如右圖，角度 θ=__110__度。
解



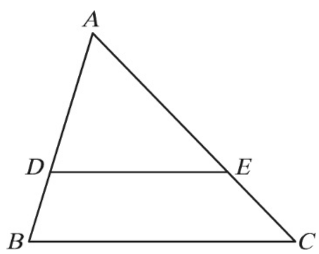
3. 已知 x 是正整數，若 16，9，$x-5$ 表三角形的三邊長，則滿足此條件的 x 值有__17__個。
解



4. 如右圖，$\overline{OE}$ = __$\sqrt{5}$__。
解



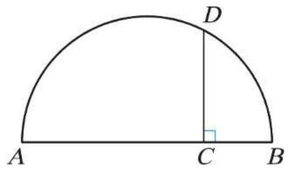
5. 如右圖，以直角三角形的三邊為邊長向外作正方形，若正方形 $ABED$、$BFGC$ 的面積分別為 36、64，則正方形 $ACHI$ 的面積為__100__。
解



6. 如右圖，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=11$，$\overline{AC}=12$，$\overline{AD}=6$，$\overline{AE}=8$，則：
(1) $\overline{DE}$ = __$\frac{22}{3}$__。
(2) △ADE 面積與△ABC 面積的比值為__$\frac{4}{9}$__。
解

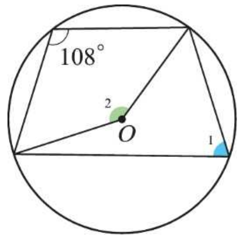
7. 如右圖，$\overline{AB}$ 為直徑，點 C 在 $\overline{AB}$ 上，點 D 在圓弧上，且 $\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=3$，若 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$，則 $\overline{CD}=$ __$2\sqrt{6}$__。

解



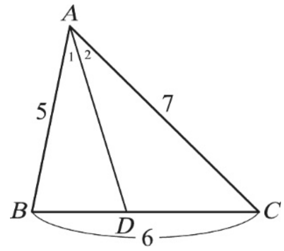
8. 如右圖，O 為圓心，則$\angle 2$ 為__144__度。

解



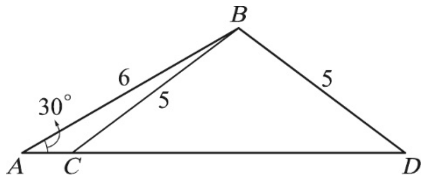
9. 如右圖，$\triangle ABC$ 三邊長依序為 5，6，7，且知$\angle 1=\angle 2$，則$\overline{BD}=$ __$\frac{5}{2}$__。

解



10. 如右圖，$\overline{CD}=$__8__。

解

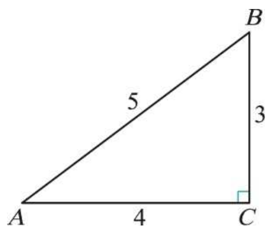


11. 如右圖，$\angle C=90°$，

(1) $\sin A=$ __$\frac{3}{5}$__。 (2) $\cos A=$ __$\frac{4}{5}$__。 (3) $\tan A=$ __$\frac{3}{4}$__。

(4) $\sin B=$ __$\frac{4}{5}$__。 (5) $\cos B=$ __$\frac{3}{5}$__。 (6) $\tan B=$ __$\frac{4}{3}$__。

解

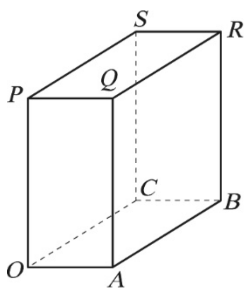


12. 如右圖，$OABCPQRS$ 為一長方體，$\overline{OA}=2$，$\overline{OC}=3$，$\overline{OP}=4$，

(1) 一隻蜜蜂由點 O 飛到點 R，其最短路徑長為__$\sqrt{29}$__。

(2) 一隻螞蟻由點 O 爬到點 R，其最短路徑長為__$\sqrt{41}$__。

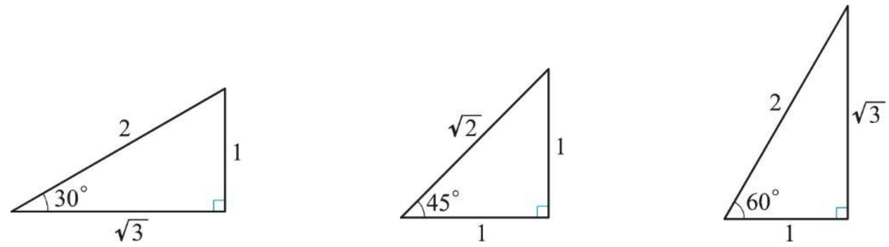
解



衛接與先修知識

衛接焦點 1　直角三角形

1. 特別角

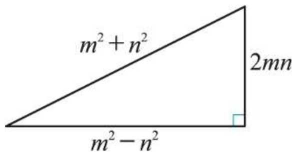


2. 畢氏三元組

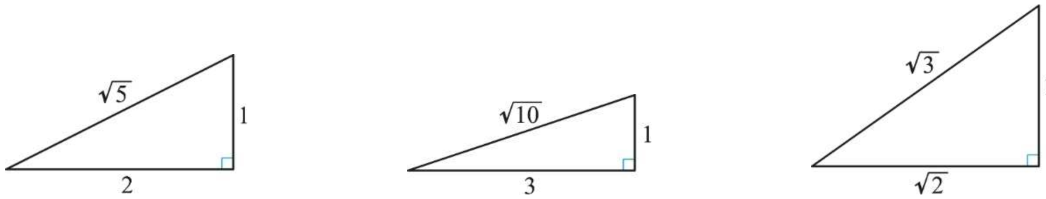
已知 m，n 為兩正整數且 $m>n$，則 m^2-n^2，m^2+n^2，$2mn$ 可為一個直角三角形的三邊長。

說明：

(1) 因為 $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$，
所以可形成直角三角形，如右圖所示。



(2) 其它常見的直角三角形



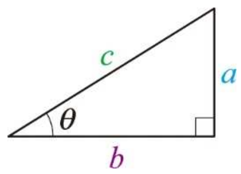
衛接焦點 2　三角比的關係

已知 θ 為銳角

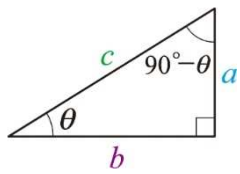
(1) 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

(2) 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

(3) 餘角關係：① $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$。
② $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$。



圖(一)



圖(二)

說明：

(1) 如圖(一)，畢氏定理 $c^2=a^2+b^2$，

則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{c^2}=1$。

(2) 如圖(一)，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a}{b}=\tan\theta$。

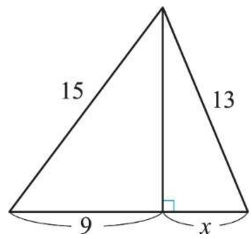
(3) 如圖(二)，① $\sin(90°-\theta)=\dfrac{b}{c}=\cos\theta$。

② $\cos(90°-\theta)=\dfrac{a}{c}=\sin\theta$。

練習 1.

(1) 如右圖，$x=$ <u>5</u> 。

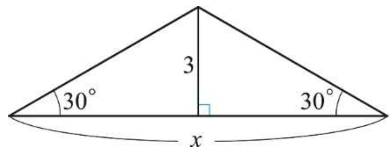
(2) 依畢氏三元組，給定 $m=6$，$n=3$，可得直角三角形三邊長為 <u>27，36，45</u> 。



練習 2.

(1) 如右圖，$x=$ ______ 。

(2) 依畢氏三元組，給定 $m=5$，$n=1$，可得直角三角形三邊長為 <u>10，24，26</u> 。



練習 3.

(1) $\sin^2 23°+\sin^2 37°+\cos^2 23°+\cos^2 37°=$ <u>2</u> 。

(2) 已知 θ 為銳角且 $2\sin\theta=3\cos\theta$，則 $\tan\theta=$ <u>$\dfrac{3}{2}$</u> 。

(3) 下列哪一選項的值與 $\sin 23°$相同？ (A) $\cos 23°$ (B) $\sin 67°$ (C) $\cos 67°$ (D) $\tan 67°$。

答 <u>(C)</u> 。

練習 4.

(1) 若 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，則 $1-\cos^2\theta=$ <u>$\dfrac{1}{9}$</u> 。

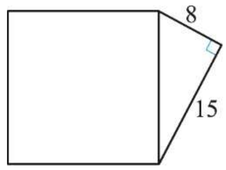
(2) 已知 θ 為銳角且 $3\cos\theta-\sin\theta=0$，則 $\tan\theta=$ <u>3</u> 。

(3) 下列哪一個選項的值與 $\cos 37°$ 相同？ (A) $\sin 37°$ (B) $\sin 53°$ (C) $\cos 53°$ (D) $\tan 53°$。

答 <u>(B)</u> 。

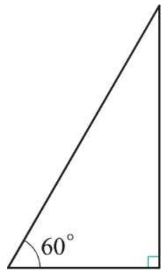
銜接與先修能力檢測

1. 如右圖，正方形的面積為 289 。



解

2. 如右圖，

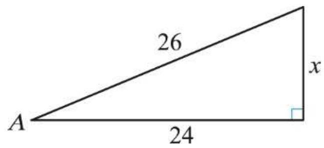


(1) $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 。　　(2) $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ 。

(3) $\tan 60° = \sqrt{3}$ 。

解

3. 如右圖，

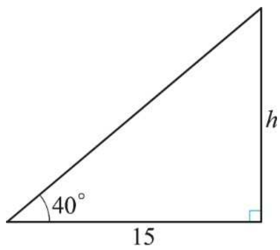


(1) $x =$ 10 。　　(2) $\sin A = \dfrac{5}{13}$ 。

(3) $\tan A = \dfrac{5}{12}$ 。

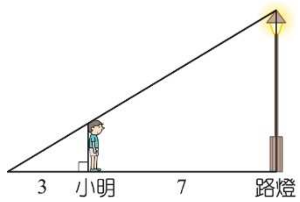
解

4. 如右圖，已知 $\tan 40° \approx 0.8391$，則 $h \approx$ 12.59 。（四捨五入取到小數點後第二位）



解

5. 如右圖，小明的身高 180 公分，前方有一座垂直路面的路燈，當他站在離路燈底座 7 公尺處，發現自己影長為 3 公尺，試問路燈的高度是 6 公尺。



解

6. 已知 θ 為銳角，若 $\cos \theta = t$，則 $\sin \theta = \sqrt{1-t^2}$ 。（以 t 表示）

解

7. 已知 θ 為銳角且 $\dfrac{\cos\theta+2\sin\theta}{\cos\theta-2\sin\theta}=11$，則 $\tan\theta=$ $\underline{\dfrac{5}{12}}$ 。

解

8. 試求 $\sin^2 15°+\sin^2 25°+\sin^2 45°+\sin^2 65°+\sin^2 75°$ 之值為 $\underline{\dfrac{5}{2}}$ 。

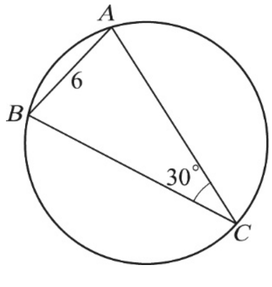
解

幾何與三角比綜合能力檢測

1. 如右圖，試求出 $\tan 15°=$ $\underline{2-\sqrt{3}}$ 。

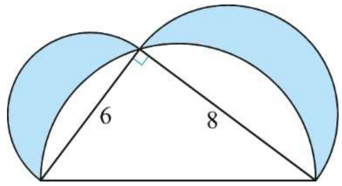
解

2. 如右圖，圓內接三角形 ABC，$\overline{AB}=6$，$\angle ACB=30°$，則此外接圓的半徑為 $\underline{6}$ 。



解

3. 如右圖，分別以直角三角形三邊長為直徑作出三個半圓，則鋪色部分的面積為 24 。

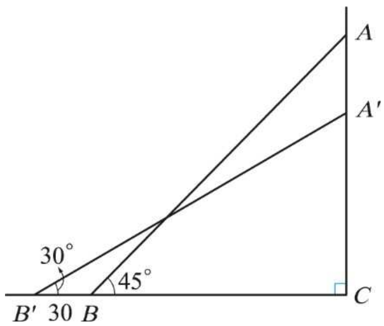


解

4. 已知 θ 為銳角且 $2\sin\theta-\cos\theta-1=0$，則 $\sin\theta$ 之值為 $\dfrac{4}{5}$ 。

解

5. 如右圖，一根木棍 $\overline{AB}$ 原本倚靠牆上，在地面上滑動了 30 公分成為 $\overline{A'B'}$，則此木棍的長度為 $60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$ 公分。



解