

## 國中複習

## 1. 運算法則

- (1) 交換律： $a+b=b+a$ ； $a\times b=b\times a$ 。
- (2) 結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ； $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ 。
- (3) 分配律：①  $a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$ 。  
②  $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。

## 2. 最簡分數

若一個分數的分子與分母互質，則稱此分數為最簡分數。

## 3. 乘法公式

- (1) 和的平方公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。
- (2) 差的平方公式： $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。
- (3) 平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。
- (4)  $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 。

## 4. 公式變化

- (1)  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 。
- (2)  $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ 。
- (3)  $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ 。
- (4)  $(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ 。
- (5)  $(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$ 。

## 5. 指數律

設  $a\neq 0$ ， $b\neq 0$ ， $m$ 、 $n$  為正整數，則：

- (1)  $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 。
- (2)  $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 。
- (3)  $(a^m)^n=a^{mn}$ 。
- (4)  $(a\times b)^m=a^m\times b^m$ 。

## 6. 科學記號

將一個正數  $a$  表成  $a=b\times 10^n$  的型式，其中  $n$  為整數，且  $1\leq b<10$ 。

## 基礎能力檢測

1. 已知  $15\times 16\times 17=4080$ ，則  $(-15)\times(-16)\times(-17)=$      -4080    。

解

2. 計算  $(88.8)^2-(11.2)^2=$      7760    。

解

3. 計算  $(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3 = \underline{64}$  。

解

4. 已知  $108 \times 25 = 2700$ ，計算  $108 \times 25^3 - 2699 \times 25^2 = \underline{625}$  。

解

5. 計算  $\frac{2019^2 - 2 \times 2019 + 1}{2018} - \frac{108^2 + 2 \times 108 \times 1911 + 1911^2}{2019} = \underline{-1}$  。

解

6. 已知  $a - b = 10$ ， $ab = -6$ ，則  $a^2 + b^2 = \underline{88}$  。

解

7. 已知  $\alpha + \beta = 6$ ， $\alpha\beta = 3$ ，則  $\frac{\beta+1}{\alpha} + \frac{\alpha+1}{\beta} = \underline{12}$  。

解

8. 已知  $a, b, c, d$  為實數，且  $(a^2 + 2a + 1) + (b^2 + b + \frac{1}{4}) + (c^2 - c + \frac{1}{4}) + (d^2 - 2a + 1) = 0$ ，

則  $a + b + c + d = \underline{0}$  。

解

9. 已知  $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，則  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{7}$  。

解

10. 已知  $A = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$ ，則  $A$  的個位數字為何？

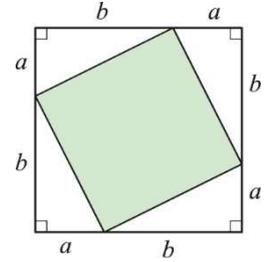
- (A) 0 (B) 2 (C) 6 (D) 8。

答 (A)。

11. 如右圖，鋪色部分的面積可以下列哪一個選項表示？

- (A)  $a^2 - b^2$  (B)  $a^2 + b^2$  (C)  $2ab$  (D)  $2\sqrt{2} ab$ 。

答 (B)。



12. 所謂「PM 2.5」是指粒徑小於 2.5 微米的細微懸浮微粒，而登革熱病毒則是直徑約 30~50 奈米的球形病毒。已知 1 微米 =  $10^{-6}$  公尺，1 奈米 =  $10^{-9}$  公尺，試問 2.5 微米是 50 奈米的多少倍？

- (A) 5 倍 (B) 20 倍 (C) 50 倍 (D) 200 倍。

答 (C)。

## 銜接與先修知識

### 銜接焦點 1 立方公式

1.  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。
2.  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。
3.  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。
4.  $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。

說明：

- (1)  $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$   
 $= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。
  - (2)  $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$   
 $= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。
- (3)、(4)可直接由移項再提公因式得到。

### 銜接焦點 2 公式推廣

1.  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 。
2.  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 。
3.  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ 。
4.  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)$ 。

練習 1.

已知  $a+b=5$ ， $ab=-3$ ，則：

(1)  $a^2+b^2 = \underline{31}$ 。

(2)  $a^3+b^3 = \underline{170}$ 。

練習 2.

已知  $a-b=3$ ， $ab=1$ ，則：

(1)  $a^2+b^2 = \underline{11}$ 。

(2)  $a^3-b^3 = \underline{36}$ 。

練習 3.

已知  $x + \frac{1}{x} = 3$ ，則：

(1)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{7}$ 。

(2)  $x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{18}$ 。

練習 4.

已知  $x - \frac{1}{x} = 5$ ，則：

(1)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{27}$ 。

(2)  $x^3 - \frac{1}{x^3} = \underline{140}$ 。

## 銜接與先修能力檢測

1. 已知  $a=99$ ， $b=1$ ，則  $a^3+b^3=$  970300 。

解

2. 已知  $a-b=5$ ， $ab=3$ ，則  $a^4b-ab^4=$  510 。

解

3. 已知  $a+b=3$ ， $ab=1$ ，則  $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} =$  18 。

解

4. 已知  $x + \frac{1}{x} = 3$ ，則  $x^5 + \frac{1}{x^5} =$  123 。

解

5. 已知  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 3$ ，則  $a^6 + \frac{1}{a^6} =$  18 。

解

6.  $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$  之值為 1023。

解

7.  $3^5 + 3^4 \times 2 + 3^3 \times 2^2 + 3^2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + 2^5$  之值為 665。

解

8. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數  $a$  後，螢幕上的數會變成  $a^2$ 。當一開始時螢幕上的數  $b$  為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近  $81^4$ 。試問實數  $b$  最接近下列哪一個選項？  
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 9。

答 (D)。

解

### 乘法公式綜合能力檢測

1. 小於  $(99.8)^2$  的最大整數為下列何者？  
(A) 9990 (B) 9980 (C) 9970 (D) 9960。

答 (D)。

解

2. 設  $a, b$  為實數，若  $a+b=1, a^2+b^2=2$ ，則  $a^3+b^3 = \underline{\frac{5}{2}}$ 。

**解**

3. 若  $a$  是方程式  $x^2-4x+2=0$  的一個解，則  $a^3 + \frac{8}{a^3} = \underline{40}$ 。

**解**

4. 若  $a-b=2+\sqrt{2}, b-c=2-\sqrt{2}$ ，則  $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$  之值為下列何者？  
(A) 14 (B) 28 (C)  $4\sqrt{6}+4$  (D)  $4\sqrt{6}-4$ 。

**答** (A)。

**解**

5. 已知  $\alpha > 0$  且  $\beta > 0$ ，若  $\alpha^n - \beta^n = 0$ ，其中  $n$  為正整數，試說明  $\alpha = \beta$ 。

**解**

因為  $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$

所以  $\alpha^n - \beta^n = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$  或  $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1} = 0$

又  $\alpha > 0$  且  $\beta > 0$ ，因此  $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1} > 0$  恆成立

因此  $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1} \neq 0$

故  $\alpha - \beta = 0$ ，即  $\alpha = \beta$ ，得證。

# 單元 2

## 根式運算

### 國中複習

#### 1. 平方根

已知  $a \geq 0$ ，則  $x^2 = a$  表示

- (1)  $a$  是  $x$  的平方。
- (2)  $x$  是  $a$  的平方根，即  $x = \pm\sqrt{a}$ 。

#### 2. 根式

- (1)  $\sqrt[2]{a}$  稱為二次方根，可省略「2」簡寫為  $\sqrt{a}$ 。
- (2)  $\sqrt[n]{a}$ ：其中稱  $n$  為開方次數，稱  $a$  為被開方數，稱  $\sqrt[n]{a}$  為  $a$  的  $n$  次方根。
- (3) 二次根式  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a \geq 0。 \\ -a, & \text{當 } a < 0。 \end{cases}$
- (4) 若  $a$  為完全平方數，則  $\sqrt{a}$  必為整數。
- (5) 若  $a = m^2 \times k$ ，則  $\sqrt{a} = \sqrt{m^2 \times k} = m\sqrt{k}$ ，其中  $m > 0$  且  $k > 0$ 。
- (6)  $\sqrt[3]{a^3} = a$ 。
- (7) 當  $n$  為奇數，則  $\sqrt[n]{a^n} = a$ ；  
當  $n$  為偶數，則  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ 。

#### 3. 同類方根

例如  $3\sqrt{2}$ ， $6\sqrt{2}$  皆有「 $\sqrt{2}$ 」，稱之為同類方根，可以加減乘除。

#### 4. 同次方根

例如  $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{11}$  皆為「二次方根」，可乘除，不可加減。

#### 5. 根式的乘除

- (1) 若  $a, b$  為正數或 0，則  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。
- (2) 若  $a, b$  為任意實數，則  $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ 。
- (3) 若  $a \geq 0, b > 0$ ，則  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。
- (4) 若  $a, b$  為任意實數，其中  $b \neq 0$ ，則  $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 。

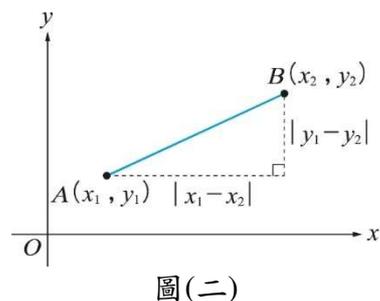
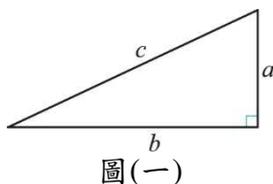
#### 6. 畢氏定理

一個直角三角形兩股長分別為  $a, b$ ，斜邊為  $c$ ，則  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，如圖(一)。

#### 7. 距離公式

在直角坐標平面上，已知  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，

則  $A, B$  兩點的距離為  $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，如圖(二)。



8. 根式分母有理化：當式子有意義時：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}。$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}。$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}。$$

$$(4) \frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}。$$

### 基礎能力檢測

1. 若  $x^2-12x+45$  的平方根為  $\pm 3$ ，則  $x = \underline{6}$ 。

解

2. 化簡  $4\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} = \underline{2\sqrt{3}}$ 。

解

3. 化簡  $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8} \times \sqrt{9} \times \sqrt{10} = \underline{720}$ 。

解

4. 已知  $a=2\sqrt{6}$ ， $b=3\sqrt{3}$ ， $c=4\sqrt{2}$ ，下列哪一個選項是正確的？

(A)  $a > b > c$  (B)  $b > c > a$  (C)  $c > a > b$  (D)  $c > b > a$ 。

答 (D)。

解

5. 若  $n$  為正整數且  $\sqrt{108-n}$  亦為正整數，則符合條件的  $n$  有 10 個。

解

6. 若  $n$  為正整數且  $\sqrt{108 \times n}$  亦為正整數，則符合條件的最小  $n$  值為 3。

**解**

7. 已知  $-3 < a < 1$ ，則  $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a+3)^2}$  等於下列哪一個選項？  
 (A) 4 (B) -4 (C)  $2a+2$  (D)  $-2a-2$ 。

**答** (A)。

**解**

8. 求值： $\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}+2}$ 。

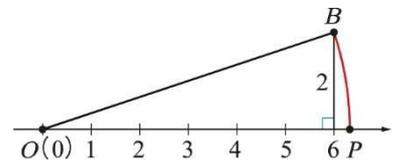
**解**

9. 如右圖，以  $O(0)$  為圓心， $\overline{OB}$  為半徑畫弧，交數線於點  $P$ ，則點  $P$  的坐標為下列何者？

- (A)  $4\sqrt{5}$  (B)  $3\sqrt{6}$  (C)  $2\sqrt{10}$  (D)  $\sqrt{38}$ 。

**答** (C)。

**解**

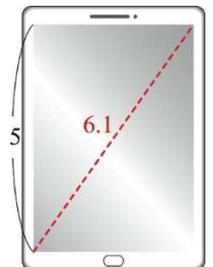


10. 已知有一最新手機號稱為 6.1 吋螢幕（即對角線長 6.1 吋），若螢幕長度為 5 吋，則螢幕寬度大約為多少吋？

- (A) 2 吋 (B) 2.5 吋 (C) 3 吋 (D) 3.5 吋。

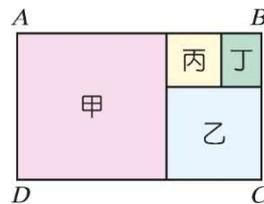
**答** (D)。

**解**



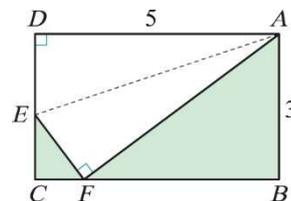
11. 如右圖，長方形  $ABCD$  中，甲、乙、丙皆為正方形，若乙的面積為 6，丙的面積為 2，則長方形  $ABCD$  的面積為 14+6√3。

解



12. 如右圖， $ABCD$  為長方形， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ 。今若將頂點  $D$  摺起與  $\overline{BC}$  邊上的點  $F$  重合，則摺痕  $\overline{AE}$  的長度為  $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ 。

解



## 銜接與先修知識

### 銜接焦點 1 雙重根式的化簡

已知  $a \geq b \geq 0$ ，則：

$$(1) \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}。$$

$$(2) \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}。$$

說明：

已知  $a \geq b \geq 0$ ，則：

$$(1) \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}+\sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b}。$$

$$(2) \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}| = \sqrt{a} - \sqrt{b}。$$

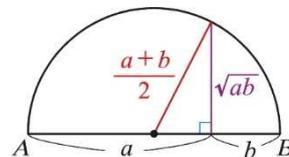
### 銜接焦點 2 算幾不等式

若  $a, b$  為非負實數，則有  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，當  $a=b$  時，等號成立。

說明：

(1)  $\frac{a+b}{2}$  稱為  $a$  與  $b$  的算術平均數， $\sqrt{ab}$  稱為  $a$  與  $b$  的幾何平均數。

(2) 考慮  $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。



練習 1.

化簡下列雙重根式：

(1)  $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}+1}$  。

(2)  $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}-1}$  。

(3)  $\sqrt{11+4\sqrt{6}} = \underline{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$  。

(4)  $\sqrt{14-\sqrt{96}} = \underline{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  。

練習 2.

化簡下列雙重根式：

(1)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{3}+1}$  。

(2)  $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{3}-1}$  。

(3)  $\sqrt{18+6\sqrt{5}} = \underline{\sqrt{15}+\sqrt{3}}$  。

(4)  $\sqrt{14-\sqrt{180}} = \underline{3-\sqrt{5}}$  。

練習 3.

(1) 已知  $x>0, y>0$  且  $x+y=8$ ，則  $xy$  的最大值為 16 。

(2) 已知  $x>0, y>0$  且  $xy=16$ ，則  $x+y$  的最小值為 8 。

練習 4.

(1) 已知  $x>0, y>0$  且  $x+2y=8$ ，則  $xy$  的最大值為 8 。

(2) 已知  $x>0, y>0$  且  $xy=27$ ，則  $3x+y$  的最小值為 18 。

## 銜接與先修能力檢測

1. 化簡根式  $\frac{6}{\sqrt{7+\sqrt{40}}} = \underline{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$  。

**解**

2. 化簡雙重根式  $\sqrt{6-\sqrt{20}} = \underline{\sqrt{5}-1}$  。

**解**

3. 若  $\sqrt{14+4\sqrt{10}}$  的整數部分為  $a$ ，小數部分為  $b$ ，則  $b = \underline{\sqrt{10}-3}$  。

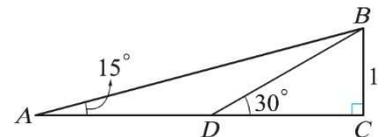
**解**

4. 若  $\sqrt{35-10\sqrt{10}}$  的整數部分為  $a$ ，小數部分為  $b$ ，則  $b = \underline{4-\sqrt{10}}$  。

**解**

5. 如右圖， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=15^\circ$ ， $\angle BDC=30^\circ$ ，若  $\overline{BC}=1$ ，則  $\overline{AB} = \underline{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$  。

**解**



6. 已知  $x, y$  都是正數且  $xy=32$ ，則  $x^2+y^2$  的最小值為 64。

解

7. 有一長方形，其周長為 12，則此長方形的面積最大值為 9。

解

8. 有一長方形，其面積為 24，則此長方形的周長最小值為  $8\sqrt{6}$ 。

解

### 根式運算綜合能力檢測

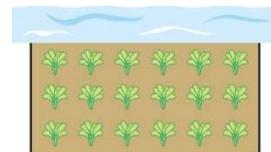
1. 若  $a$  為正整數，且  $\sqrt{108} \leq \sqrt{a} < 15$ ，則滿足條件的  $a$  有 117 個。

解

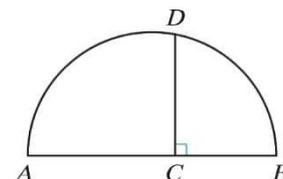
2. 下列哪一個整數與  $\sqrt{2025+\sqrt{114}}$  最接近？  
(A) 44 (B) 45 (C) 46 (D) 47。

答 (B)。  
解

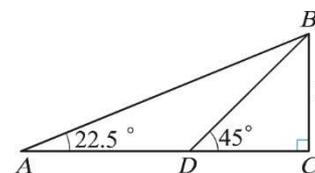
3. 小英有一網繩子，總長為 20 公尺，想在河邊圍出一個長方形菜園種香菜，河邊不必圍繩子，僅圍其餘三邊，則小英的菜園面積最大為 50 平方公尺。



4. 右圖是一個半圓， $\overline{AB}$  為直徑，點  $C$  在  $\overline{AB}$  上，點  $D$  在圓弧上，且  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 。已知  $\overline{AC} = 3 + 2\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則  $\overline{CD} = \underline{2\sqrt{2} + 2}$ 。



5. 如右圖， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 22.5^\circ$ ， $\angle BDC = 45^\circ$ ，若  $\overline{BC} = 1$ ，則  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$  的  
值為  $\sqrt{2} - 1$ 。



# 單元

## 3

# 數列與級數

## 國中複習

### 1. 數列

將一群數排成一行稱為數列，即  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，其中  $a_1$  為首項， $a_n$  為末項，此數列共有  $n$  項。

### 2. 等差數列

有一個數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，若滿足  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$ （通常令此差距為  $d$ ，稱為公差），則稱數列為等差數列。

### 3. 等差數列的第 $n$ 項

一等差數列的首項為  $a_1$ ，公差為  $d$ ，則此數列的第  $n$  項  $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

### 4. 等差中項

若  $a, b, c$  三數依序成等差數列，則  $b = \frac{a+c}{2}$ 。

### 5. 級數

將一數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  用加號「+」連結起來稱為級數，即  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。

### 6. 等差級數

將一等差數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  用加號「+」連結起來稱為等差級數，即  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。

### 7. 等差級數的和

(1) 一個等差級數共有  $n$  項，首項為  $a_1$ ，公差為  $d$ ，則此等差級數和為  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ 。

(2) 一個等差級數共有  $n$  項，首項為  $a_1$ ，末項為  $a_n$ ，則此等差級數和為  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ 。

### 8. 等比數列

有一個數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，若滿足  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ （通常令此比值為  $r$ ，稱為公比），則稱數列為等比數列。

### 9. 等比中項

若  $a, b, c$  三數依序成等比數列，則  $b$  稱為  $a, c$  的等比中項且  $b = \pm\sqrt{ac}$ 。

## 基礎能力檢測

1. 等差數列  $\{a_n\}$  如下：100, 98, 96, 94, …，則此數列的第 36 項為 30。

**解**

2. 等差數列  $\{a_n\}$  :  $-50, \dots, 50$ , 總共有 51 項, 則此數列的公差為 2。

解

3. 如右圖, 每一直行, 每一橫列或任一對角線上的三數皆為等差數列, 則  $b = \underline{29}$ 。

解

$a$	$b$	$c$
$d$	9	$e$
3	$f$	-25

4. 等差數列  $\{a_n\}$  共有 10 項, 第 2 項  $a_2 = 12$ , 第 9 項  $a_9 = -2$ , 則此數列的所有項的和為 50。

解

5. 等差數列  $\{a_n\}$  首項為  $-113$ , 第 2 項為  $-105$ , 則此數列自第 16 項開始為正數。

解

6. 有一直角三角形三邊長成等差數列, 若此三角形周長為 24, 則此三角形的面積為 24。

解

7. 下列哪些數列是等比數列? (多選)

(A)  $1, 1, 1, 1, 1$     (B)  $1, -1, 1, -1, 1$     (C)  $-1, -1, 1, 1, -1$

(D)  $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}$     (E)  $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}$ 。

答 (A)(B)(D)。

解

8. 已知  $\alpha, 12, 9$  三數依序成等比數列，則  $\alpha = \underline{16}$ 。

**解**

9. 設  $\{a_n\}$  是一個等比數列，且  $a_2 = 16, a_3 = -32$ ，則：

(1) 公比  $r = \underline{-2}$ 。

(2) 首項  $a_1 = \underline{-8}$ 。

(3) 數字  $-2048$  是此數列的第 9 項。

**解**

10. 籃球場的看臺觀眾席  $D$  區有 15 排座位，此區每一排都比其前一排多 1 個座位，阿哲坐在第 6 排，發現此排共有 20 個座位，則觀眾席  $D$  區總共有 330 個座位。

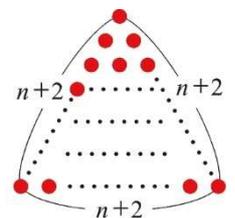
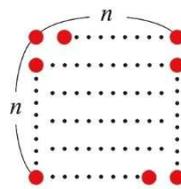
**解**

11. 有大小相同的球若干個，已知全部的球剛好可以排成一個每邊有  $n$  個球的正方形。若將全部的球改排成一個每邊  $n+2$  個球的正三角形，也剛好用完所有的球。則可知全部的球有多少個？

(A) 36 個 (B) 64 個 (C) 100 個 (D) 144 個。

**答** (A)。

**解**



12. 有一天大寶意外救了國王，國王很高興，答應給大寶一個請求。大寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 3 元，每天給的錢比前一天多 1 元，連續給 30 天。則大寶總共可以得到 465 元。

## 銜接與先修知識

### 銜接焦點 1 等比級數

將一等比數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  用加號「+」連結起來稱為等比級數，即  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。

(1) 一個等比級數共有  $n$  項，首項為  $a_1$ ，公比  $r \neq 1$ ，則此等比級數和為  $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 。

(2) 一個等比級數共有  $n$  項，首項為  $a_1$ ，公比為  $r=1$ ，則此等比級數和為  $S_n = na_1$ 。

**說明：**

(1) 公比  $r \neq 1$

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \quad \text{①}$$

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①} - \text{② 可得 } (1-r)S_n = a_1 - a_1r^n \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}。$$

**註：**  $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}。$

(2) 公比  $r=1$ ，則  $S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = na_1$ （每一項都是  $a_1$ ）。

### 銜接焦點 2 級數和 $\sum_{k=1}^n a_k$

■ 級數和常以  $\sum$ （唸 *sigma* 或 *summation*）來表示，即  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。

**說明：**

(1) 數列的一般項為  $a_k$ 。

(2)  $k$  之值由下標的 1 到上標  $n$ ，依序表出  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，再相加起來。

(3) 例如： $\sum_{k=1}^5 (2k+1) = (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + (2 \times 4 + 1) + (2 \times 5 + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

(4) 進階概念— $k$  可以從任何整數開始，

例如： $\sum_{k=4}^7 (3k-2) = (3 \times 4 - 2) + (3 \times 5 - 2) + (3 \times 6 - 2) + (3 \times 7 - 2) = 10 + 13 + 16 + 19$

練習 1.

試求下列等比級數的和：

- (1)  $1+2+4+8+\dots+128=\underline{255}$ 。 (2)  $2-4+8-16+\dots+128=\underline{86}$ 。  
(3)  $1+3+9+27+\dots+243=\underline{364}$ 。 (4)  $3-9+27-81+\dots+243=\underline{183}$ 。

練習 2.

以  $\sum$  表示下列各小題的級數和：(變數為  $k$ ，且起點從 1 開始)

- (1) 等差級數和  $1+2+3+\dots+100=\underline{\sum_{k=1}^{100} k}$ 。  
(2) 等差級數和  $1+3+5+7+\dots+99=\underline{\sum_{k=1}^{50} (2k-1)}$ 。  
(3) 等比級數和  $2+2^2+2^3+\dots+2^{10}=\underline{\sum_{k=1}^{10} 2^k}$ 。  
(4) 等差級數和  $2+4+6+\dots+100=\underline{\sum_{k=1}^{50} (2k)}$ 。  
(5) 等比級數和  $3+3^2+3^3+\dots+3^{10}=\underline{\sum_{k=1}^{10} 3^k}$ 。

銜接與先修能力檢測

1. 若一等比級數的首項為  $a_1=3$ ，公比為 2，則其前 4 項的和為 45。

**解**

2. 若一等比級數的首項為  $a_1=3$ ，公比為  $-\frac{1}{2}$ ，則其前 4 項的和為  $\frac{15}{8}$ 。

解

3. 以  $\Sigma$  表示級數和  $(3+5\times 1)+(3^2+5\times 2)+(3^3+5\times 3)+\cdots+(3^{10}+5\times 10)=\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)$ 。

解

4. 等比級數  $2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\frac{2}{81}-\frac{2}{243}$  的和為  $\frac{364}{243}$ 。

解

5. 有一天二寶意外救了國王，國王很高興，答應給二寶一個請求。二寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 4 元，每天給的錢是前一天的兩倍，連續給 30 天，則二寶總共可得到 1073741823 元。（已知  $2^{30}=1073741824$ ）

## 數列與級數綜合能力檢測

1. 已知數列  $\{a_n\}$  為一等差數列，若  $a_3=1$ ， $a_5=5$ ，則此數列的
- (1) 公差為 2。
  - (2) 首項為 -3。
  - (3) 第 8 項  $a_8=\underline{11}$ 。
  - (4) 前 6 項的總和為 12。

解

2. 已知數列  $\{a_n\}$  為一等比數列且公比大於 0，若  $a_3=20$ ， $a_5=5$ ，則此數列的

(1) 公比為  $\frac{1}{2}$ 。

(2) 首項為 80。

(3) 第 8 項  $a_8 = \frac{5}{8}$ 。

(4) 前 6 項的總和為  $\frac{315}{2}$ 。

**解**

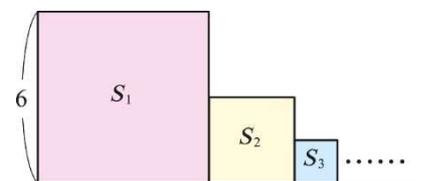
3. 級數和  $\sum_{k=1}^4 (3^k - 3k + 3)$  之值為 102。

**解**

4. 某電影院共有 15 排座位，已知每一排均比前排多 2 個座位，若第 7 排有 30 個座位，則可知電影院總共有 480 個座位。

**解**

5. 如右圖，有一邊長為 6 公分的正方形  $S_1$ ，若以  $S_1$  邊長的一半為邊長作一正方形  $S_2$ ，再以  $S_2$  邊長的一半為邊長再作一正方形  $S_3$ ，……，依此規律繼續操作，則  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  的面積總和為  $\frac{3069}{64}$  平方公分。



**解**

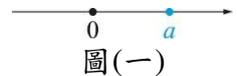
# 單元 4

## 坐標與函數

### 國中複習

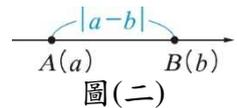
#### 1. 數線

任意實數  $a$  都可以在數線上找到它對應的位置，如圖(一)。



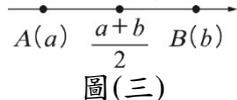
#### 2. 絕對值

若  $x$  為任意數，則  $|x|$  表示  $x$  到原點的距離。



#### 3. 數線上兩點距離

若數線上  $A(a)$ ， $B(b)$ ，則  $A$ 、 $B$  兩點的距離為  $\overline{AB} = |a-b|$ ，如圖(二)。

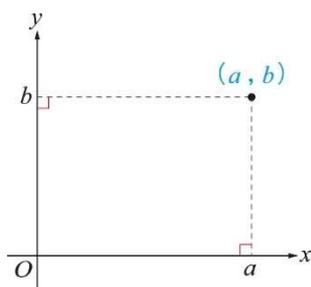


#### 4. 數線上中點公式

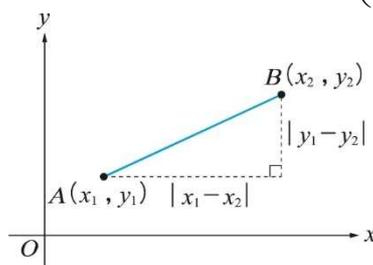
若數線上  $A(a)$ ， $B(b)$ ，則  $\overline{AB}$  的中點坐標為  $\frac{a+b}{2}$ ，如圖(三)。

#### 5. 平面直角坐標系

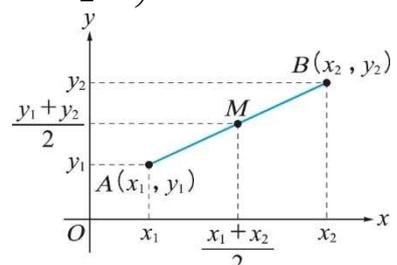
由兩條互相垂直的數線構成，平面上的所有點都有對應的坐標  $(a, b)$ ，其中  $a$  稱為  $x$  坐標， $b$  稱為  $y$  坐標，如圖(四)。



圖(四)



圖(五)



圖(六)

#### 6. 兩點距離

坐標平面上， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$  兩點的距離為  $\overline{AB} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ ，如圖(五)。

#### 7. 中點坐標

坐標平面上， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，則  $\overline{AB}$  的中點坐標為  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ，如圖(六)。

#### 8. 函數的意義

對於每一個  $x$  值，都恰有一個  $y$  值與之對應，則稱  $y$  是  $x$  的函數，以符號  $y=f(x)$  表示。其中稱  $x$  為自變數，稱  $y$  為應變數。

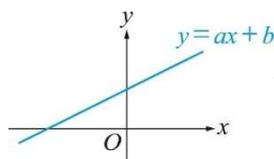
#### 9. 函數圖形

設  $y=f(x)$  是一個函數，則在直角坐標平面上，所有這樣的點  $(x, y)$  所構成的圖形，即為此函數  $y=f(x)$  的圖形。

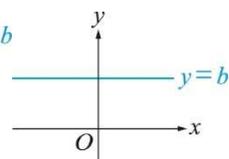
### 10. 線型函數圖形

若  $a, b$  為實數，則  $y=f(x)=ax+b$  稱為線型函數。

- (1) 若  $a \neq 0$ ，則  $y=f(x)=ax+b$  為一次函數，其圖形是一條斜直線，如圖(七)。
- (2) 若  $a=0$ ，則  $y=b$  為常數函數，其圖形是一條水平線，如圖(八)。



圖(七)



圖(八)

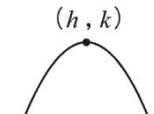
### 11. 二次函數的圖形

設二次函數為  $y=a(x-h)^2+k$ ，則：

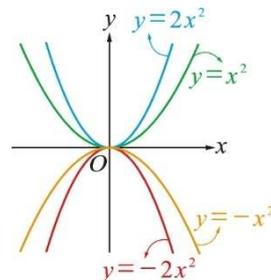
- (1)  $a > 0$ ，圖形為開口向上的拋物線，頂點  $(h, k)$  為最低點，如圖(九)。
- (2)  $a < 0$ ，圖形為開口向下的拋物線，頂點  $(h, k)$  為最高點，如圖(十)。
- (3)  $|a|$  值愈大，則拋物線的開口愈小； $|a|$  值愈小，則拋物線的開口愈大，如圖(十一)。



圖(九)



圖(十)



圖(十一)

### 12. 二次函數的最大值與最小值

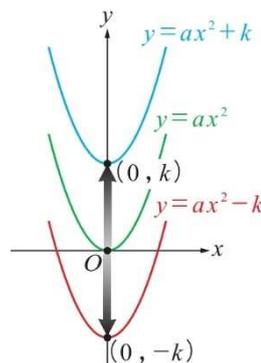
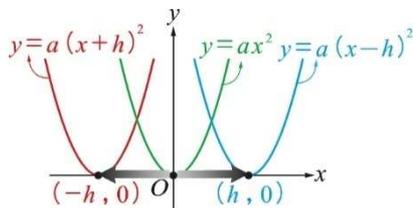
設二次函數為  $y=a(x-h)^2+k$ ，

- (1)  $a > 0$ ，拋物線的開口向上，則在  $x=h$  時， $y$  有最小值  $k$ 。
- (2)  $a < 0$ ，拋物線的開口向下，則在  $x=h$  時， $y$  有最大值  $k$ 。

### 13. 二次函數的圖形的平移

已知  $h > 0, k > 0$

- (1) 右移  $h$  單位： $y=ax^2 \Rightarrow y=a(x-h)^2$ 。
- (2) 左移  $h$  單位： $y=ax^2 \Rightarrow y=a(x+h)^2$ 。
- (3) 上移  $k$  單位： $y=ax^2 \Rightarrow y=ax^2+k$ 。
- (4) 下移  $k$  單位： $y=ax^2 \Rightarrow y=ax^2-k$ 。
- (5) 不論左右或上下平移，開口方向及大小都沒有改變，但是頂點位置可能會改變。



## 基礎能力檢測

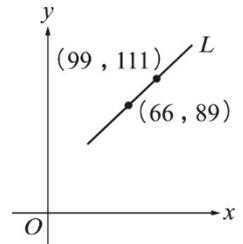
1. 已知一次函數  $f(x)=3x-1$ ，則  $f(1)+f(2)+f(-3)=$      -3    。

**解**

2. 已知  $a < 0, b > 0$ ，則直線  $y = ax + b$  圖形不通過下列哪一個象限？  
 (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。

答 (C)。  
 解

3. 如右圖，直線  $L$  為線型函數  $f(x) = ax + b$ ，則  $f(0) = \underline{45}$ 。



解

4. 若  $y = ax + b$  的圖形是一條通過點  $(-4, 3)$  的水平直線，則數對  $(a, b) = \underline{(0, 3)}$ 。

解

5. 直角坐標平面原點  $O(0, 0)$  到直線  $L: 3x + 4y - 12 = 0$  上的所有點的距離之中，最小距離為  $\underline{\frac{12}{5}}$ 。

解

6. 已知二次函數  $y = a(x - h)^2 + k$  的頂點為  $(1, 2)$ ，且通過點  $(3, 4)$ ，則此二次函數為  $\underline{y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2}$ 。

解

7. 已知  $f(x) = -2(x - 3.3)^2 + 4$ ，則下列的函數值之中哪一個最大？  
 (A) $f(2)$  (B) $f(3)$  (C) $f(4)$  (D) $f(5)$ 。

答 (B)。  
 解

8. 已知  $f(x) = 2(x-3.3)^2 - 4$ ，則下列的函數值哪一個最大？

(A)  $f(2)$  (B)  $f(3)$  (C)  $f(4)$  (D)  $f(5)$ 。

答 解 (D)

9. 二次函數  $y = x^2 + 9x - 36$  的圖形與  $x$  軸交於相異兩點  $A$ 、 $B$ ，則  $\overline{AB}$  的長度為 15。

解

10. 已知  $k > 0$ ，若二次函數  $y = x^2 + 3$  向右平移  $k$  單位可通過點  $(0, 7)$ ，則  $k$  之值為 2。

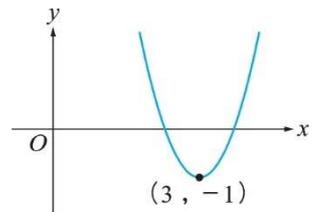
解

11. 已知由地面算起每爬升 100 公尺，氣溫就下降 0.6 度。若現在地面溫度是 20 度，阿雄在高度為 3600 公尺的山上健行，則他所在位置的氣溫應該是 -1.6 度。

解

12. 右圖是二次函數  $y = 2x^2 + bx + c$  的圖形，頂點坐標為  $(3, -1)$ ，則數對  $(b, c) =$   $(-12, 17)$ 。

解

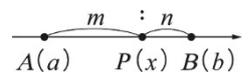


## 銜接與先修知識

### 銜接焦點 1 分點公式

數線上有相異兩點  $A(a)$ ， $B(b)$ ，若點  $P$  是  $\overline{AB}$  上的分點，且滿足

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ ，其中  $m, n$  皆為正實數，則點  $P$  的坐標為  $\frac{na + mb}{m + n}$ 。

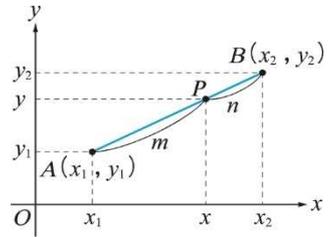


### 說明

(1) 假設  $a < b$ ，令  $P(x)$ ，由  $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$

$$\Rightarrow (x-a):(b-x) = m:n \Rightarrow n(x-a) = m(b-x) \Rightarrow (m+n)x = na + mb \Rightarrow x = \frac{na + mb}{m+n}。$$

- (2) 平面上有相異兩點  $A(x_1, y_1)$  與  $B(x_2, y_2)$ ，若點  $P$  為  $\overline{AB}$  上的分點，使得  $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ ，分別討論  $x$  坐標及  $y$  坐標的分點公式，則可得到點  $P$  的坐標為  $\left( \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$ 。



### 銜接焦點 2 二次函數與配方法

將二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  整理成  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  的型式，即是對二次函數配方，如此可知二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的頂點為  $(h, k)$ ，對稱軸為  $x=h$ ，

其中  $h = -\frac{b}{2a}$ ， $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

#### 說明

(1) 使用配方法的步驟如下：

- ①  $x^2$  項及  $x$  項提出係數  $a$ ，使得  $x^2$  項的係數為 1。
- ②  $x^2$  項及  $x$  項配成完全平方。
- ③ 調整常數項。

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}。 \end{aligned}$$

練習 1.

- (1) 數線上兩點  $A(-3)$ ， $B(11)$ ，若點  $P(x)$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP} : \overline{PB} = 5 : 2$ ，則  $x = \underline{7}$ 。
- (2) 坐標平面上  $A(1, -3)$ ， $B(11, 12)$ ，若點  $P$  在  $\overline{AB}$  上，且滿足  $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則點  $P$  的坐標為  $\underline{(5, 3)}$ 。

練習 2.

- (1) 數線上兩點  $A(3)$ ， $B(-9)$ ，若點  $Q(x)$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AQ} : \overline{QB} = 2 : 1$ ，則  $x = \underline{-5}$ 。
- (2) 坐標平面上  $A(-3, 2)$ ， $B(4, 9)$ ，若點  $Q$  在  $\overline{AB}$  上，且滿足  $\overline{AQ} : \overline{QB} = 4 : 3$ ，則點  $Q$  的坐標為  $\underline{(1, 6)}$ 。

練習 3.

- (1) 二次函數  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  的頂點為  $(-2, -1)$ 。
- (2) 二次函數  $f(x) = -x^2 + 2x + 5$  的頂點為  $(1, 6)$ 。
- (3) 二次函數  $f(x) = 3x^2 - 18x - 27$  的頂點為  $(3, -54)$ 。
- (4) 二次函數  $f(x) = x^2 - 4x + 9$  的頂點為  $(2, 5)$ 。
- (5) 二次函數  $f(x) = -x^2 - 2x + 5$  的頂點為  $(-1, 6)$ 。
- (6) 二次函數  $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$  的頂點為  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 。

### 銜接與先修能力檢測

1. 數線上兩點  $A(-5)$ ， $B(15)$ ，若點  $P(x)$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則  $x = \underline{3}$ 。

解

2. 數線上  $A(a)$ ， $B(18)$ ，若點  $M(-1)$  是  $\overline{AB}$  的中點，則  $a$  之值為  $-20$ 。

解

3. 坐標平面上  $A(1, -2)$ ， $B(13, 16)$ ，若點  $Q$  在  $\overline{AB}$  上，且滿足  $\overline{AQ} : \overline{QB} = 1 : 5$ ，則點  $Q$  的坐標為  $(3, 1)$ 。

解

4. 坐標平面上  $A(a, -5)$ ， $B(3, b)$ ，若點  $Q(-1, 2)$  是  $\overline{AB}$  的中點，則數對  $(a, b) =$   $(-5, 9)$ 。

解

5. 試求下列各小題中的實數數對  $(p, q)$ ：

(1)  $x^2 + 4x + 3 = (x-p)^2 + q$ ，則數對  $(p, q) =$   $(-2, -1)$ 。

(2)  $-x^2 + x - 2 = -(x-p)^2 + q$ ，則數對  $(p, q) =$   $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ 。

(3)  $2x^2 + 6x - 3 = 2(x-p)^2 + q$ ，則數對  $(p, q) =$   $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}\right)$ 。

(4)  $-3x^2 + x + 2 = -3(x-p)^2 + q$ ，則數對  $(p, q) =$   $\left(\frac{1}{6}, \frac{25}{12}\right)$ 。

解

6. 已知  $f(x) = 2x^2 - 8x + m$  的最小值為 160，則  $m = \underline{168}$ 。

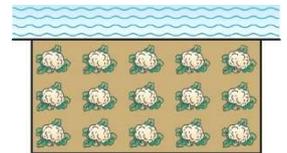
解

7. 將二次函數  $y = x^2 + 6x + 3$  的圖形上移  $k$  單位，新圖形與  $x$  軸恰交於一點，則  $k$  之值為 6。

解

8. 小明想用 60 公尺的鐵絲網在河邊圍成一長方形的菜圃，河邊可當一邊不用鐵絲網，僅圍其餘三邊。則小明可圍成的長方形菜圃的最大面積為 450 平方公尺。

解



### 坐標與函數綜合能力檢測

1. 潛水夫在水面下的深度 ( $d$  公尺) 與身體所承受壓力 ( $p$  個大氣壓) 有下列關係  $p = k \times d + 1$  (其中  $k$  為常數)，若在水面下 50 公尺，身體所承受的壓力為 5.97 個大氣壓，則在水面下 100 公尺，身體所承受的壓力為 10.94 個大氣壓。

解

2. 二次函數  $f(x) = (x-2)^2 + x^2 + (x+5)^2$  的最小值為 26。

解

3. 坐標平面上  $A(1, 2)$ ， $B(9, -6)$ ，若點  $P$  在  $\overline{AB}$  上，且滿足  $\overline{AP} : \overline{PB} = 5 : 3$ ，則點  $P$  的坐標為  $(6, -3)$ 。

解

4. 若二次函數  $f(x) = 2x^2 + 4x + k$  的圖形和  $x$  軸沒有交點，則實數  $k$  可能為下列何者？(多選)  
(A)  $-6$  (B)  $-3$  (C)  $0$  (D)  $3$  (E)  $6$ 。

答  $(D)(E)$

解

5. 設  $p, q, r$  皆為介於 2 與 10 之間的實數，且滿足  
 $\sqrt{6} |p-2| = \sqrt{7} |p-10|$ ， $\sqrt{7} |q-2| = \sqrt{8} |q-10|$ ， $\sqrt{5} |r-2| = \sqrt{6} |r-10|$ ，  
請比較  $p, q, r$  的大小，下列選項何者正確？  
(A)  $p > q > r$  (B)  $q > r > p$  (C)  $q > p > r$  (D)  $r > p > q$ 。

答  $(D)$

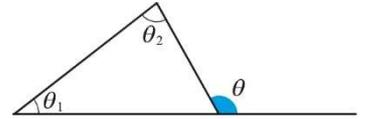
解

# 單元 5

## 幾何與三角比

### 國中複習

- (1) 三角形的內角和為  $180^\circ$ 。  
 (2) 正三角形的每一內角為  $60^\circ$ 。  
 (3) 外角定理：如右圖， $\theta = \theta_1 + \theta_2$ 。



- (1) 正  $n$  邊形的內角和為  $(n-2) \times 180^\circ$ 。  
 (2) 正  $n$  邊形的任一內角為  $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ 。

### 3. 三角形的邊角關係

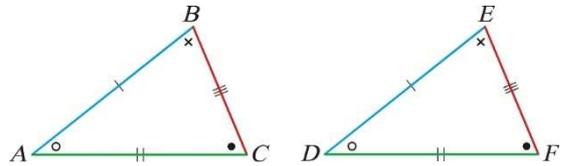
在同一個三角形中：

- 任意兩邊和大於第三邊，任意兩邊差小於第三邊。
- 大角對大邊，小角對小邊。

### 4. 三角形的全等

若  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ,

則兩個三角形的對應角相等且對應邊相等。

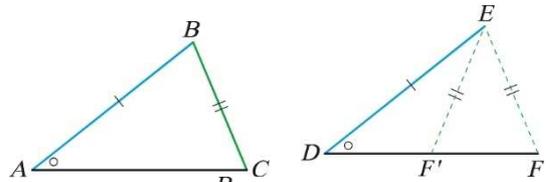


### 5. SSA

已知兩三角形  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$ ,

$\angle A = \angle D$  且  $\overline{AB} = \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} = \overline{EF}$ ,

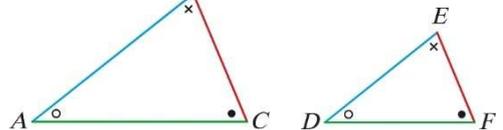
則兩個三角形可能全等也可能不全等。



### 6. 三角形的相似

若  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ,

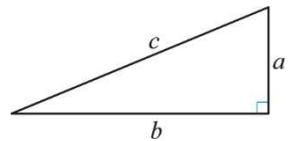
則兩個三角形的對應角相等且對應邊成比例。



### 7. 直角三角形的畢氏定理

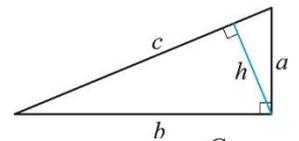
若直角三角形的斜邊長為  $c$ , 兩股長分別為  $a, b$ ,

則  $c^2 = a^2 + b^2$ 。



### 8. 直角三角形斜邊上的高

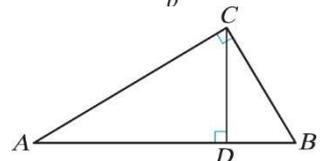
如右圖：斜邊上的高  $h = \frac{ab}{c}$ 。



### 9. 直角三角形母子相似定理

在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ,

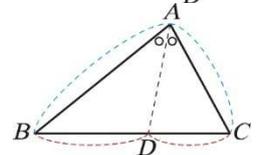
則  $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}$ 。



### 10. 內分比性質

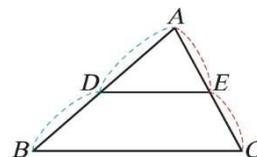
在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  平分  $\angle BAC$ ,

則  $\overline{BA} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 。



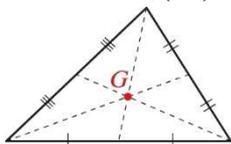
11. 平行線截三角形兩邊成比例線段性質

如右圖，若  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則  $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 。

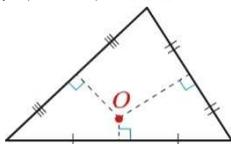


12. 三角形的心

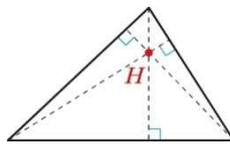
- (1) 重心，如圖(一)：三中線的交點。
- (2) 外心，如圖(二)：三邊中垂線的交點。
- (3) 垂心，如圖(三)：三邊上高的交點。
- (4) 內心，如圖(四)：三內角平分線的交點。



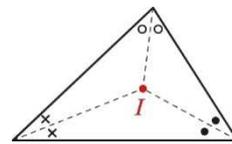
圖(一)



圖(二)



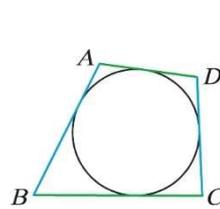
圖(三)



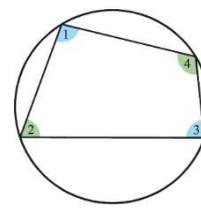
圖(四)

13. 圓外切四邊形

如圖(五)，若  $ABCD$  為圓外切四邊形，則  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ 。



圖(五)

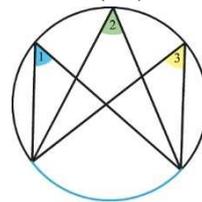


圖(六)

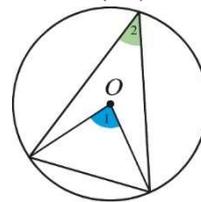
14. 圓內接四邊形對角互補

如圖(六)， $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ ， $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ 。

15. (1) 對同弧圓周角相等，如圖(七)， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ 。
- (2) 對同弧圓心角是圓周角的兩倍，如圖(八)， $\angle 1 = 2\angle 2$ 。

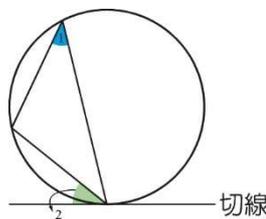


圖(七)

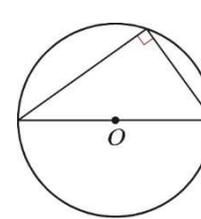


圖(八)

16. 如圖(九)，弦切角等於截弧所對圓周角  $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ 。



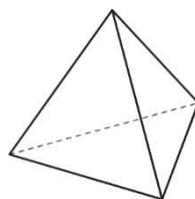
圖(九)



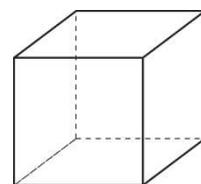
圖(十)

18. 特殊立體圖形

- (1) 正四面體，如圖(十一)。
- (2) 正六面體，如圖(十二)。



圖(十一)



圖(十二)

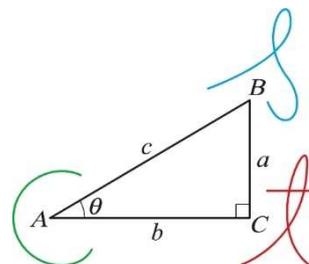
19. 三角比

銳角的正弦、餘弦、正切

(1)  $\sin \theta = \frac{a}{c}$  (對邊 / 斜邊)。

(2)  $\cos \theta = \frac{b}{c}$  (鄰邊 / 斜邊)。

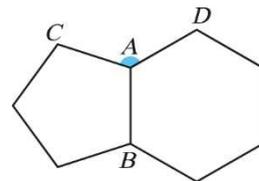
(3)  $\tan \theta = \frac{a}{b}$  (對邊 / 鄰邊)。



## 基礎能力檢測

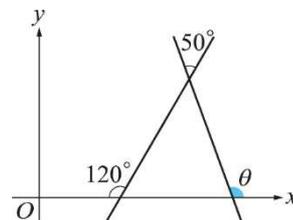
1. 如右圖，正五邊形與正六邊形有共同邊  $\overline{AB}$ ，則  $\angle CAD$  的度數為 132 度。

解



2. 如右圖，角度  $\theta =$  110 度。

解

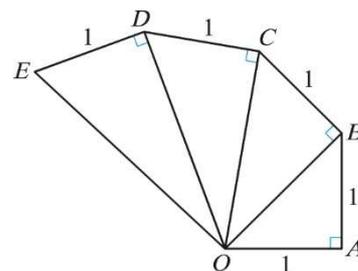


3. 已知  $x$  是正整數，若 16, 9,  $x-5$  表三角形的三邊長，則滿足此條件的  $x$  值有 17 個。

解

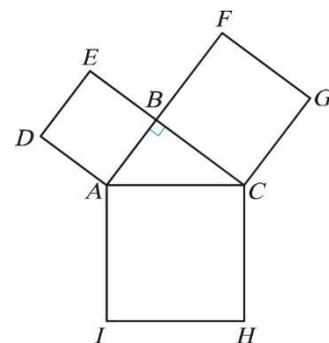
4. 如右圖， $\overline{OE} =$   $\sqrt{5}$ 。

解



5. 如右圖，以直角三角形的三邊為邊長向外作正方形，若正方形  $ABED$ 、 $BFGC$  的面積分別為 36、64，則正方形  $ACHI$  的面積為 100。

解

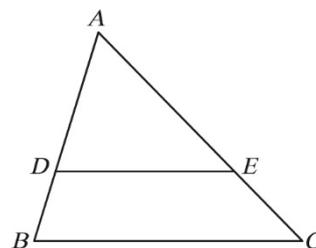


6. 如右圖， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 11$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{AE} = 8$ ，則：

(1)  $\overline{DE} =$   $\frac{22}{3}$ 。

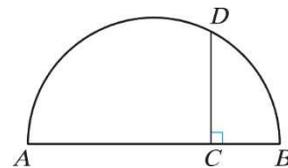
(2)  $\triangle ADE$  面積與  $\triangle ABC$  面積的比值為  $\frac{4}{9}$ 。

解



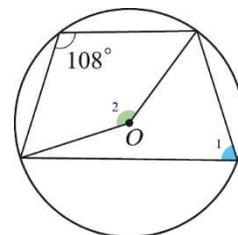
7. 如右圖， $\overline{AB}$  為直徑，點  $C$  在  $\overline{AB}$  上，點  $D$  在圓弧上，且  $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 3$ ，若  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，則  $\overline{CD} = \underline{2\sqrt{6}}$ 。

解



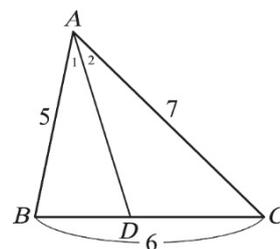
8. 如右圖， $O$  為圓心，則  $\angle 2$  為 144 度。

解



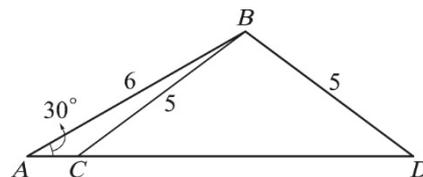
9. 如右圖， $\triangle ABC$  三邊長依序為 5, 6, 7，且知  $\angle 1 = \angle 2$ ，則  $\overline{BD} = \underline{\frac{5}{2}}$ 。

解



10. 如右圖， $\overline{CD} = \underline{8}$ 。

解

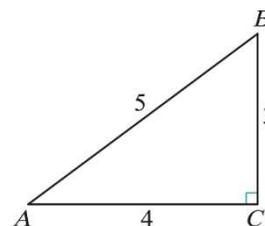


11. 如右圖， $\angle C = 90^\circ$ ，

(1)  $\sin A = \underline{\frac{3}{5}}$ 。 (2)  $\cos A = \underline{\frac{4}{5}}$ 。 (3)  $\tan A = \underline{\frac{3}{4}}$ 。

(4)  $\sin B = \underline{\frac{4}{5}}$ 。 (5)  $\cos B = \underline{\frac{3}{5}}$ 。 (6)  $\tan B = \underline{\frac{4}{3}}$ 。

解

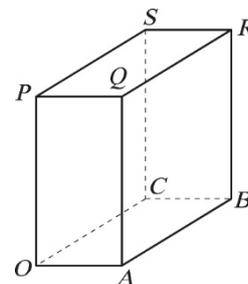


12. 如右圖， $OABCPQRS$  為一長方體， $\overline{OA} = 2$ ， $\overline{OC} = 3$ ， $\overline{OP} = 4$ ，

(1) 一隻蜜蜂由點  $O$  飛到點  $R$ ，其最短路徑長為  $\underline{\sqrt{29}}$ 。

(2) 一隻螞蟻由點  $O$  爬到點  $R$ ，其最短路徑長為  $\underline{\sqrt{41}}$ 。

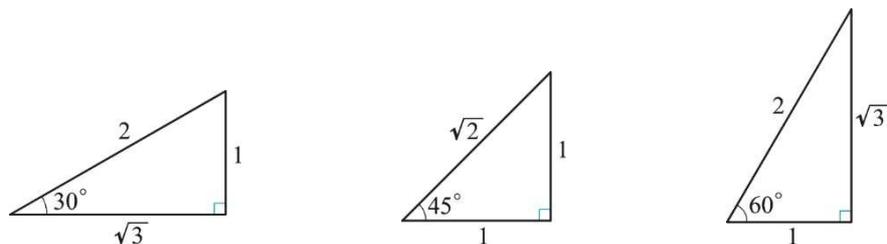
解



## 銜接與先修知識

### 銜接焦點 1 直角三角形

#### 1. 特別角



#### 2. 畢氏三元組

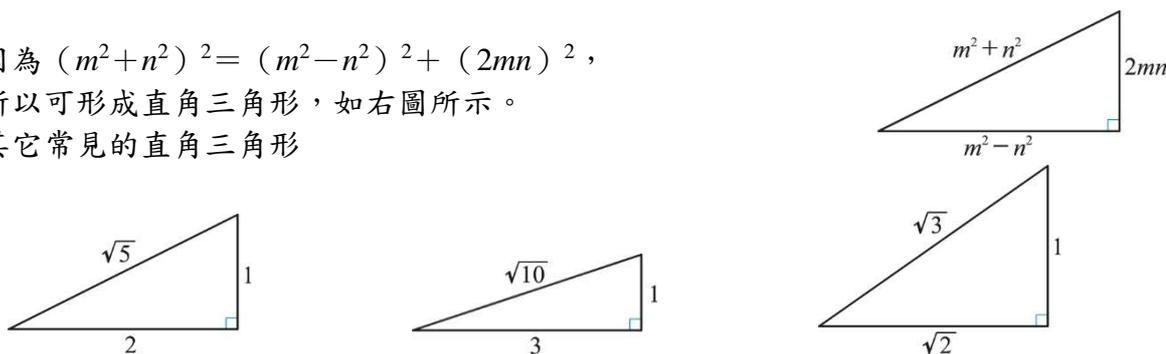
已知  $m, n$  為兩正整數且  $m > n$ ，則  $m^2 - n^2, m^2 + n^2, 2mn$  可為一個直角三角形的三邊長。

**說明：**

(1) 因為  $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ ，

所以可形成直角三角形，如右圖所示。

(2) 其它常見的直角三角形



### 銜接焦點 2 三角比的關係

已知  $\theta$  為銳角

(1) 平方關係： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。

(2) 商數關係： $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 。

(3) 餘角關係：①  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ 。

②  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ 。

**說明：**

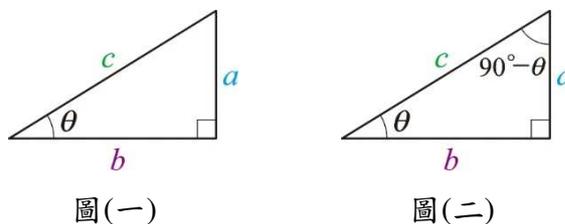
(1) 如圖(一)，畢氏定理  $c^2 = a^2 + b^2$ ，

$$\text{則 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1。$$

(2) 如圖(一)， $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan \theta$ 。

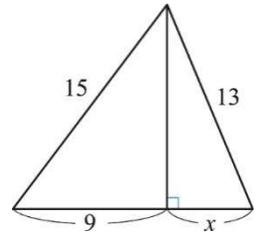
(3) 如圖(二)，①  $\sin(90^\circ - \theta) = \frac{b}{c} = \cos \theta$ 。

②  $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{a}{c} = \sin \theta$ 。



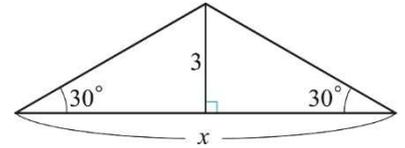
練習 1.

- (1) 如右圖， $x = \underline{5}$ 。
- (2) 依畢氏三元組，給定  $m=6$ ， $n=3$ ，可得直角三角形三邊長為 27, 36, 45。



練習 2.

- (1) 如右圖， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 依畢氏三元組，給定  $m=5$ ， $n=1$ ，可得直角三角形三邊長為 10, 24, 26。



練習 3.

- (1)  $\sin^2 23^\circ + \sin^2 37^\circ + \cos^2 23^\circ + \cos^2 37^\circ = \underline{2}$ 。
- (2) 已知  $\theta$  為銳角且  $2 \sin \theta = 3 \cos \theta$ ，則  $\tan \theta = \underline{\frac{3}{2}}$ 。
- (3) 下列哪一選項的值與  $\sin 23^\circ$  相同？ (A)  $\cos 23^\circ$  (B)  $\sin 67^\circ$  (C)  $\cos 67^\circ$  (D)  $\tan 67^\circ$ 。  
答 (C)。

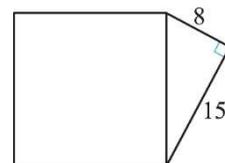
練習 4.

- (1) 若  $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ，則  $1 - \cos^2 \theta = \underline{\frac{1}{9}}$ 。
- (2) 已知  $\theta$  為銳角且  $3 \cos \theta - \sin \theta = 0$ ，則  $\tan \theta = \underline{3}$ 。
- (3) 下列哪一個選項的值與  $\cos 37^\circ$  相同？ (A)  $\sin 37^\circ$  (B)  $\sin 53^\circ$  (C)  $\cos 53^\circ$  (D)  $\tan 53^\circ$ 。  
答 (B)。

## 銜接與先修能力檢測

1. 如右圖，正方形的面積為 289。

**解**



2. 如右圖，

(1)  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(2)  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 。

(3)  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 。

**解**



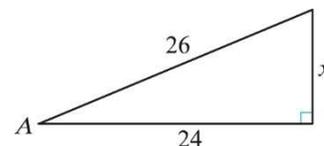
3. 如右圖，

(1)  $x = \underline{10}$ 。

(2)  $\sin A = \frac{5}{13}$ 。

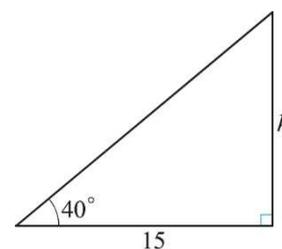
(3)  $\tan A = \frac{5}{12}$ 。

**解**



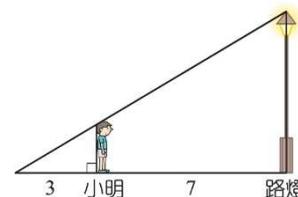
4. 如右圖，已知  $\tan 40^\circ \approx 0.8391$ ，則  $h \approx \underline{12.59}$ 。（四捨五入取到小數點後第二位）

**解**



5. 如右圖，小明的身高 180 公分，前方有一座垂直路面的路燈，當他站在離路燈底座 7 公尺處，發現自己影長為 3 公尺，試問路燈的高度是 6 公尺。

**解**



6. 已知  $\theta$  為銳角，若  $\cos \theta = t$ ，則  $\sin \theta = \underline{\sqrt{1-t^2}}$ 。（以  $t$  表示）

**解**

7. 已知  $\theta$  為銳角且  $\frac{\cos \theta + 2 \sin \theta}{\cos \theta - 2 \sin \theta} = 11$ ，則  $\tan \theta = \underline{\frac{5}{12}}$ 。

解

8. 試求  $\sin^2 15^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 75^\circ$  之值為  $\underline{\frac{5}{2}}$ 。

解

### 幾何與三角比綜合能力檢測

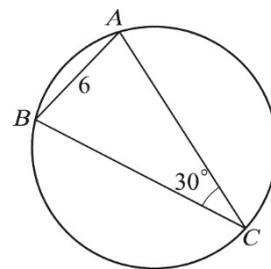
1. 如右圖，試求出  $\tan 15^\circ = \underline{2 - \sqrt{3}}$ 。

解



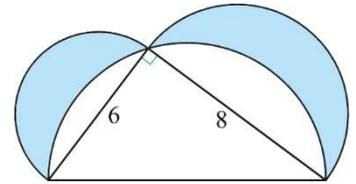
2. 如右圖，圓內接三角形  $ABC$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，則此外接圓的半徑為  $\underline{6}$ 。

解



3. 如右圖，分別以直角三角形三邊長為直徑作出三個半圓，則鋪色部分的面積為 24。

解



4. 已知  $\theta$  為銳角且  $2 \sin \theta - \cos \theta - 1 = 0$ ，則  $\sin \theta$  之值為  $\frac{4}{5}$ 。

解

5. 如右圖，一根木棍  $\overline{AB}$  原本倚靠牆上，在地面上滑動了 30 公分成為  $\overline{A'B'}$ ，則此木棍的長度為  $60\sqrt{3} + 60\sqrt{2}$  公分。

解

