國立臺灣師範大學附屬高級中學　112 學年度　高二數學 B 寒假作業　參考答案

一、多選題 (7 題)

1. (　　) 下列哪些選項沒有意義？ (A)$\log_1 2$　(B)$\log_3\sqrt{2}$　(C)$\log_5(-3)$　(D)$\log_{(-5)}3$　(E)$\log_{\sqrt{2}-1}\sqrt{3}$

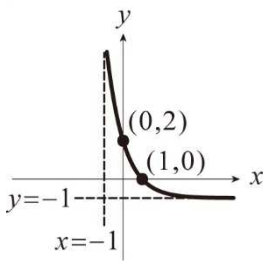
【易】

【龍騰自命題】

解答　ACD

解析　(A)因為底數不能為 1，所以 $\log_1 2$ 沒有意義　(B)因為 $\log_3\sqrt{2}$ 的底數大於 0 且不等於 1，又真數大於 0，所以 $\log_3\sqrt{2}$ 是有意義的　(C)因為真數需大於 0，所以 $\log_5(-3)$沒有意義　(D)因為底數需大於 0 且不等於 1，所以 $\log_{(-5)}3$ 沒有意義　(E)因為 $\log_{\sqrt{2}-1}\sqrt{3}$ 的底數大於 0 且不等於 1，又真數大於 0，所以 $\log_{\sqrt{2}-1}\sqrt{3}$ 是有意義的

2. (　　) 圖為函數 $y=a^{x+b}+c$ 的部分圖形，且 $y=-1$ 為漸近線，則下列選項何者正確？



(A)$0<a<1$　(B)$b<0$　(C)$c<0$　(D)圖形恆在 $x=-1$ 的右方　(E)圖形恆在 $y=-1$ 的上方

【易】

【松山高中段考】

解答　ABCE

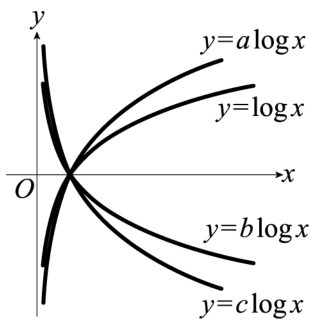
解析　(A)因為是嚴格遞減的指數函數圖形，所以底數 a 滿足 $0<a<1$

(B)當 $x=0$ 時，$y=a^b+c=2\Rightarrow a^b=3>1\Rightarrow a^b>a^0$，且因為 $0<a<1$，所以 $b<0$

(C)因為 $y=a^x$ 的圖形以 x 軸為漸近線，而 $y=a^{x+b}+c$ 的漸近線為 $y=-1$，所以 $c=-1<0$

(D)指數函數圖形並無鉛直線的漸近線，故錯誤　(E)指數函數圖形以 $y=-1$ 為漸近線，故圖形恆在 $y=-1$ 上方

3. (　　) 圖為函數 $y=a\log x$、$y=b\log x$、$y=c\log x$ 與 $y=\log x$ 的圖形，且 $y=b\log x$ 與 $y=\log x$ 的圖形對稱於 x 軸。選出所有正確的選項



(A)$a>1$　(B)$a<1$　(C)$b=-1$　(D)$c<-1$

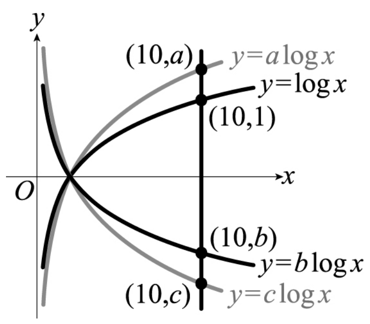
【易】

【SUPER 講義】

解答　ACD

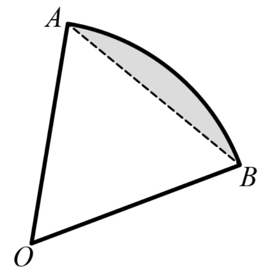
解析　因為 $y=b\log x$ 與 $y=\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，所以 $b=-1$。

作直線 $x=10$ 與四個函數圖形分別交於四點，



又由圖可知：$a>1>b=-1>c$

4. (　　) 如圖，已知扇形 AOB 的周長為 $6+\pi$ 公分，且圓心角為 $\dfrac{\pi}{3}$ 弳，則下列哪些敘述**錯誤**？



(A)扇形 AOB 的半徑為 3 公分　(B)扇形的弧長 $\overset{\frown}{AB}$ 為 π 公分　(C)扇形 AOB 的面積為 2π 平方公分　(D) $\overline{AB}=3$ 公分
(E)弓形（圖中的鋪色區域）的面積為 $\dfrac{6\pi-9\sqrt{3}}{4}$ 平方公分

【中】
【龍騰自命題】

解答　C

解析　因為扇形 AOB 的周長為 $2r+r\times\dfrac{\pi}{3}=6+\pi$，可得半徑 $r=3$。

又圓心角為 $\dfrac{\pi}{3}$ 弳，由扇形的弧長與面積公式，

可得弧長 $\overset{\frown}{AB}=r\theta=3\times\dfrac{\pi}{3}=\pi$（公分），面積為 $\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}$（平方公分）。

因為 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，且扇形的半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}$，所以 ΔAOB 為正三角形，故 $\overline{AB}=3$ 公分。

弓形（圖中的鋪色區域）的面積為

（扇形 AOB 的面積）－（正三角形 AOB 的面積）$=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{6\pi-9\sqrt{3}}{4}$（平方公分）

5.（　　）設 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 為兩非零向量，若 $|\overrightarrow{u}|=2|\overrightarrow{v}|=|2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}|=2$，且 θ 為 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 的夾角，則下列何者正確？　(A) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\dfrac{7}{2}$　(B) $\cos\theta=-\dfrac{7}{8}$　(C) $|\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}|=1$　(D)以 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 為兩邊的三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　(E) $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影長度為 $\dfrac{7}{4}$

【中】
【師大附中段考】

解答　BCE

解析　(A) $|2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}|^2=4|\overrightarrow{u}|^2+12\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+9|\overrightarrow{v}|^2\Rightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\dfrac{7}{4}$

(B) $-\dfrac{7}{4}=2\times1\times\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=-\dfrac{7}{8}$

(C)因為 $|\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}|^2=|\overrightarrow{u}|^2+4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+4|\overrightarrow{v}|^2=1$，所以 $|\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}|=1$　(D)由(B)，得 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，因此，以 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 為兩邊的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(E)所求 $=|\overrightarrow{u}||\cos\theta|=\dfrac{7}{4}$

6.（　　）令 $a=\cos(100\pi)^\circ$，試問下列哪些選項是對的？　(A) $a=1$　(B) $-1<a\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(C) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a\le0$　(D) $0<a\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(E) $\dfrac{1}{2}<a\le1$

【中】
【龍騰自命題】

解答　BDE

解析　$\pi\approx3.14\Rightarrow(100\pi)^\circ\approx314^\circ$，

所以 $a=\cos(100\pi)^\circ\approx\cos314^\circ=\cos46^\circ$，

又 $\cos60^\circ<\cos46^\circ<\cos45^\circ\Rightarrow\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7.（　　）關於函數 $f(x)=2(1+\sin(3x+\dfrac{\pi}{6}))$，試問下列哪些選項正確？　(A) $0\le f(x)\le4$　(B) $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時有最大值　(C) $f(x)$ 的

週期為 $\frac{3\pi}{2}$　(D) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=\frac{\pi}{2}$　(E) $f(1)<2$

【中】
【龍騰自命題】

解答　AE

解析　(A)○：$-1\le\sin(3x+\frac{\pi}{6})\le1\Rightarrow0\le1+\sin(3x+\frac{\pi}{6})\le2\Rightarrow0\le2(1+\sin(3x+\frac{\pi}{6}))\le4$，

所以 $0\le f(x)\le4$　(B)╳：當 $x=\frac{\pi}{6}$ 時

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{6})=2(1+\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}))=2(1+\cos\frac{\pi}{6})=2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=2+\sqrt{3}$（不為最大值）　(C)╳：$f(x)=2+2\sin(3x+\frac{\pi}{6})$，故 $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(D)╳：$f(\frac{\pi}{2})=2[1+\sin(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6})]=2(1+\sin\frac{5\pi}{3})=2-\sqrt{3}$，但 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸必過圖形的最高點或最低點的鉛直線，即 $f(k)=0$ 或 4 時，$x=k$ 才為對稱軸，故 $x=\frac{\pi}{2}$ 非對稱軸　(E)○：因為 $f(1)=2(1+\sin(3+\frac{\pi}{6}))$，又 $\pi<3+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow-1<\sin(3+\frac{\pi}{6})<0\Rightarrow0<1+\sin(3+\frac{\pi}{6})<1$

$\Rightarrow0<2(1+\sin(3+\frac{\pi}{6}))<2$，

所以 $0<f(1)<2$

二、填充題 (37 題)

1. 直線 $L_1:x+3y=2$ 與 $L_2:2x+y=4$ 的鈍夾角為____________。

【易】
【仿課本類題】

解答　$135°$

解析　設直線 $L_1:x+3y=2$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,3)$，

直線 $L_2:2x+y=4$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(2,1)$，

L_1 與 L_2 的夾角 θ 滿足 $\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\pm\frac{2+3}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\theta=45°$ 或 $135°$。

故兩直線的鈍夾角為 $135°$。

2. 設 x 為實數，$\overrightarrow{a}=(6,x)$、$\overrightarrow{b}=(2,1)$，若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影為 $(-4,-2)$，則 $x=$____________。

【易】
【新竹高中段考】

解答　-22

解析　$\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}=\frac{6\times2+x\times1}{(\sqrt{5})^2}(2,1)=(-4,-2)=-2(2,1)$，

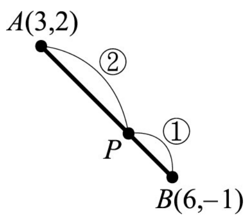
因此 $\frac{12+x}{5}=-2\Rightarrow x=-22$。

3. 已知 $A(3,2)$、$B(6,-1)$，P 為 $\overline{AB}$ 上一點且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$，則 P 點坐標為____________。

【易】
【仿課本類題】

解答　(5,0)

解析



P 點坐標為 $(\frac{2\times6+1\times3}{3},\frac{2\times(-1)+1\times2}{3})=(5,0)$。

4. 化簡下列各式：

(1) $\log_{10}\frac{4}{5}+\log_{10}\frac{9}{8}-\log_{10}\frac{3}{10}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2) $\frac{2}{3}\log_{10}\sqrt{8}+\log_{100}25=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(3) $\log_2 9\times\log_3 4=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(4) $3^{\frac{5\log 2}{\log 3}}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【易】

【龍騰自命題】

解答　(1)$\log_{10}3$　(2)1　(3)4　(4)32

解析　(1) $\log_{10}\frac{4}{5}+\log_{10}\frac{9}{8}-\log_{10}\frac{3}{10}=\log_{10}\left(\frac{4}{5}\times\frac{9}{8}\div\frac{3}{10}\right)=\log_{10}\left(\frac{4}{5}\times\frac{9}{8}\times\frac{10}{3}\right)=\log_{10}3$。

(2) 因為 $\frac{2}{3}\log_{10}\sqrt{8}=\frac{2}{3}\log_{10}(2^3)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\log_{10}2^{\frac{3}{2}}=\log_{10}\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=\log_{10}2$，

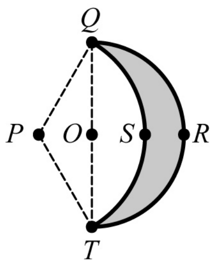
$\log_{100}25=\frac{\log 25}{\log 100}=\frac{2\log 5}{2\log 10}=\frac{\log 5}{\log 10}=\log_{10}5$，

所以 $\frac{2}{3}\log_{10}\sqrt{8}+\log_{100}25=\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}(2\times5)=\log_{10}10=1$。

(3) $\log_2 9\times\log_3 4=\frac{\log 9}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}=\frac{2\log 3}{\log 2}\times\frac{2\log 2}{\log 3}=2\times2=4$。

(4) $3^{\frac{5\log 2}{\log 3}}=3^{\frac{\log 2^5}{\log 3}}=3^{\log_3 32}=32$。

5. 設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，其中有一款設計圖如圖所示：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、$\overline{QT}$ 為直徑的半圓，$\overline{QT}=2\sqrt{3}$。圓弧 QST 的圓心在 P 點，$\overline{PQ}=\overline{PT}=2$。圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的灰色區域 $QRTSQ$ 即為某一天所見的月亮形狀。設此灰色區域的面積為 $a\pi+\sqrt{b}$，其中 π 為圓周率，a 為有理數，b 為整數，則 $a=$ ①＿＿＿＿＿＿＿＿（化為最簡分數），$b=$ ②＿＿＿＿＿＿＿＿。



【易】

【109 學測,SUPER 講義】

解答　① $\frac{1}{6}$

② 3

解析　$\triangle PQT$ 為等腰三角形，$\overline{OQ}=\overline{OT}=\sqrt{3}$，

因此 $\triangle OPQ$ 與 $\triangle OPT$ 為全等的直角三角形。

直角三角形 OPQ 中，$\overline{PQ}=2$，$\overline{OQ}=\sqrt{3}$，

因此 $\overline{OP}=1$，且 $\triangle OPQ$ 為 30°-60°-90° 的直角三角形，$\angle QPT=120°$。

扇形 $PQST$ 的面積為 $\frac{1}{3}\times2^2\pi=\frac{4\pi}{3}$，

半圓 QRT 的面積為 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}^2\pi=\frac{3\pi}{2}$，

$\triangle PQT$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$，

因此斜線區域面積為 $\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{6}\pi+\sqrt{3}$，

故 $a=\frac{1}{6}$，$b=3$。

6. 已知坐標平面上三點 $(3,\log 3)$、$(6,\log 6)$ 與 $(12,y)$ 在同一直線上，則 $y=\log$ ＿＿＿＿＿＿。

【易】
【107 學測】

解答 24

解析 利用斜率相等，得 $\dfrac{\log 6-\log 3}{6-3}=\dfrac{y-\log 3}{12-3}\Rightarrow\dfrac{\log 2}{3}=\dfrac{y-\log 3}{9}$。

解得 $y=\log 3+3\log 2=\log 3+\log 8=\log 24$。

7. $y=\log(-x^2+20x-\dfrac{999}{10})$ 的最大值為＿＿＿＿＿＿。

【易】
【龍騰自命題】

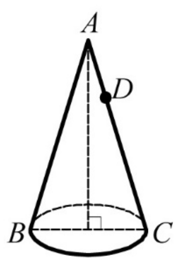
解答 -1

解析 $-x^2+20x-\dfrac{999}{10}=-(x-10)^2-\dfrac{999}{10}+100=-(x-10)^2+\dfrac{1}{10}$，

因為 $-x^2+20x-\dfrac{999}{10}$ 的最大值為 $\dfrac{1}{10}$，

所以 $y=\log(-x^2+20x-\dfrac{999}{10})$ 的最大值為 $\log\dfrac{1}{10}=-1$。

8. 如圖為一直圓錐，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=4$，C 處有一螞蟻沿錐面爬行，求：

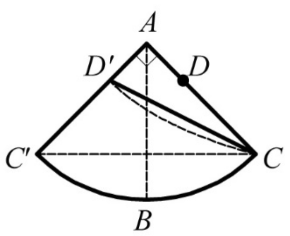


(1) 繞一圈回到 C 處，最短路線長為＿＿＿＿＿＿。
(2) 繞一圈回到 D 處，最短路線長為＿＿＿＿＿＿。

【中】
【龍騰自命題】

解答 (1) $12\sqrt{2}$
(2) $4\sqrt{10}$

解析 今沿斜高 $\overline{AC}$ 將此圓錐剪開平展成一扇形，如圖



(1) 以 C、C' 的連線段為最短，而錐底的圓周長 = 扇形的弧長，

所以 $6\pi=12\theta$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$（扇形之圓心角），

$\triangle ACC'$ 為直角三角形，

$\overline{CC'}^2=\overline{AC}^2+\overline{AC'}^2=12^2+12^2$，

所以 $\overline{CC'}=12\sqrt{2}$。

(2) 以 C、D' 的連線段為最短，

所以 $\overline{CD'}^2=\overline{AD'}^2+\overline{AC}^2=4^2+12^2=160$，

故 $\overline{CD'}=4\sqrt{10}$。

9. 若 $\begin{cases}2^{x+3}+9^{y+1}=35\\ 8^{\frac{x}{3}}+3^{2y+1}=5\end{cases}$，則數對 $(x,y)=$ ＿＿＿＿＿。

【中】
【龍騰自命題】

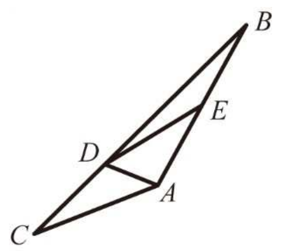
解答 $(2,-\dfrac{1}{2})$

解析　原式$\Rightarrow\begin{cases}2^x\times2^3+9^y\times9=35\\(2^3)^{\frac{x}{3}}+3^{2y}\times3^1=5\end{cases}$

令 $a=2^x$，$b=9^y$ 原式$\Rightarrow\begin{cases}8a+9b=35\\a+3b=5\end{cases}\Rightarrow a=4$ 、 $b=\dfrac{1}{3}$ ，

即 $2^x=4$，$9^y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=2$ 、 $y=-\dfrac{1}{2}$ 。

10. 設△ABC 中， E 為 $\overline{AB}$ 的中點， D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BD}=2\overline{CD}$ ，如圖所示。若 $\overrightarrow{AD}=(-2,1)$ 、 $\overrightarrow{AE}=(2,3)$ ，則 $\overrightarrow{AC}=$____________ 。



【中】
【龍騰自命題】

解答　$\left(-5,-\dfrac{3}{2}\right)$

解析　利用向量的分點公式，得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AC}$ ，

即 $3(-2,1)=2(2,3)+2\overrightarrow{AC}$ ，得 $\overrightarrow{AC}=\left(-5,-\dfrac{3}{2}\right)$ 。

11. 若 $\overrightarrow{a}=(1,-3)$ 與 $\overrightarrow{b}=(k,2)$ 的夾角為 $135°$ ，則實數 k 的值為____________ 。

【中】
【龍騰自命題】

解答　-4 或 1

解析　$\cos135°=\dfrac{k-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{k^2+4}}\Rightarrow-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{k-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{k^2+4}}$ ，

平方後，整理得 $k^2+3k-4=0$ ，解得 $k=-4$ 或 1（均成立，因為代入 $k-6<0$）。

12. 已知$(2^x-2)(2^x-8)>0$，求 x 之範圍為____________ 。

【中】
【龍騰自命題】

解答　$x>3$ 或 $x<1$

解析　因為$(2^x-2)(2^x-8)>0$，

所以 $2^x>8$ 或 $2^x<2\Rightarrow x>3$ 或 $x<1$ 。

13. 已知 $y=4\cos^2x+4\sin x+3$，且 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$ ，則 y 值的範圍為____________ 。

【中】
【三民高中段考】

解答　$7\le y\le2\sqrt{2}+5$

解析　$y=4-4\sin^2x+4\sin x+3=-4(\sin x-\dfrac{1}{2})^2+8$ ，

因為 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{2}{3}\pi$ ，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin x\le1\Rightarrow7\le y\le2\sqrt{2}+5$ 。

14. 方程式 $2^{2x+2}=2^{x+6}+68$ 的解 $x=$____________ 。

【中】
【龍騰自命題】

解答　$\log_2 17$

解析　設 $t=2^x$ （ $t>0$ ），原式$\Rightarrow4t^2=64t+68\Rightarrow t^2-16t-17=0\Rightarrow(t-17)(t+1)=0$ ， $t=17$ 或 -1 ，

因為 t 恆為正數，所以 $t=-1$ 不合，故 $t=17\Rightarrow2^x=17\Rightarrow x=\log_2 17$ 。

15. 7 點 10 分時，長針與短針所夾角度為____________弳。

【中】

【龍騰自命題】

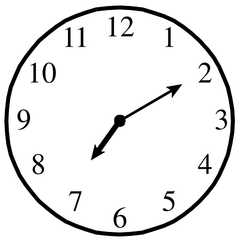
解答 $\dfrac{31\pi}{36}$

解析 每一大格均為$\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$，

所以從數字 2 到 7 共有$\dfrac{\pi}{6}\times 5=\dfrac{5\pi}{6}$，

又長針走$\dfrac{1}{6}$圈，則短針走$\dfrac{1}{6}$大格，

故長針與短針夾的角度為$\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31\pi}{36}$。



16. 設向量$\overrightarrow{u}$和$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$互相垂直，且$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(6,-5)$，若$\overrightarrow{u}$的長度為 2，則$\overrightarrow{v}$的長度為____________。

【中】

【SUPER 講義,臺中二中段考】

解答 7

解析 因為$\overrightarrow{u}$和$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$互相垂直，

所以$\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=0\Rightarrow\left|\overrightarrow{u}\right|^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\Rightarrow 4-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，

因此$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=4$。

又因為$\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{6^2+(-5)^2}=\sqrt{61}$，

所以$\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|^2=\left|\overrightarrow{u}\right|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\left|\overrightarrow{v}\right|^2=61$，

即$4+2\times4+|\overrightarrow{v}|^2=61$，解得$\overrightarrow{v}$的長度$\left|\overrightarrow{v}\right|=7$。

17. 假設小華某段時間的血壓變化可用函數$f(t)=36\sin(120\pi t)+85$來模擬，其中$f(t)$為血壓（單位：毫米汞柱），t為時間（單位：分鐘）。若$f(t)$的最大值稱為收縮壓，而連續兩個收縮壓的時間間隔為 1 次心跳的時間，則小華的心跳速率為每分鐘____________次。

【中】

【臺中二中段考】

解答 60

解析 題目中連續兩個收縮壓的時間間隔 ＝ 週期$=\dfrac{2\pi}{120\pi}=\dfrac{1}{60}$（分），

故心跳速率為每分鐘 60 次。

18. 聲音強度（w）是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，而分貝是音量（s）的單位，且與聲音強度的關係如下：$s=10\times\log\dfrac{w}{10^{-12}}$。已知平常人說話的音量為 60 分貝，狗吠叫的音量為 80 分貝，則狗吠叫之聲音強度為平常人說話之聲音強度的____________倍。

【中】

【仿課本類題】

解答 100

解析 設狗吠叫之聲音強度為w_1，平常人說話之聲音強度為w_2，

由題意得知$80=10\times\log\dfrac{w_1}{10^{-12}}$，$60=10\times\log\dfrac{w_2}{10^{-12}}$，

兩式相減可得$20=10\times\left(\log\dfrac{w_1}{10^{-12}}-\log\dfrac{w_2}{10^{-12}}\right)=10\times\log\dfrac{w_1}{w_2}$，

移項可得 $\log\dfrac{w_1}{w_2}=2$，即$\dfrac{w_1}{w_2}=10^2=100$，

故狗吠叫之聲音強度為平常人說話之聲音強度的 100 倍。

19. 二圖形 Γ_1：$y=2^x$，Γ_2：$y=3^x$ 與直線 $y=6$ 交於 $A(a,b)$、$B(c,d)$兩點，則 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=$ ＿＿＿＿＿＿。

【中】

【龍騰自命題】

解答　6

解析　$2^a=6\Rightarrow a=\log_2 6$，即 $A(\log_2 6,6)$；

$3^c=6\Rightarrow c=\log_3 6$，即 $B(\log_3 6,6)$。

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{6}{\log_2 6}+\frac{6}{\log_3 6}=\frac{6}{\frac{\log 6}{\log 2}}+\frac{6}{\frac{\log 6}{\log 3}}=\frac{6\log 2}{\log 6}+\frac{6\log 3}{\log 6}=\frac{6(\log 2+\log 3)}{\log 6}$$

$$=\frac{6\log 6}{\log 6}=6$$。

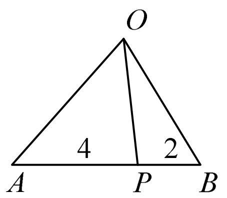
20. 已知 O、A、B 三點不共線，點 P 在直線 AB 上，若 $\overline{AP}$ ：$\overline{BP}$ $=4:2$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，則數對$(x,y)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【中】

【龍騰自命題】

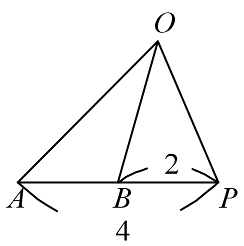
解答　$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$或$(-1,2)$

解析　(I)P 在線段 AB 上，



$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{6}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ ，得$(x,y)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$。

(II)P 在線段 AB 外，



因為 $\overline{AP}$ ：$\overline{PB}=4:2$，所以 $\overline{AB}$ ：$\overline{BP}=2:2=1:1$。

$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$ ，即 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ，

因此，$\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ ，得$(x,y)=(-1,2)$。

綜合(I)(II)，得$(x,y)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$或$(-1,2)$。

21. 設 $\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$，試以 a、b 表示：

(1) $\log_4 3=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $\log_6 5=$ ＿＿＿＿＿＿。

【中】

【龍騰自命題】

解答　(1)$\frac{b}{2a}$

(2)$\frac{1-a}{a+b}$

解析　(1)　$\log_4 3=\frac{\log 3}{\log 4}=\frac{\log 3}{\log 2^2}=\frac{\log 3}{2\log 2}=\frac{b}{2a}$

(2)　$\log_6 5=\frac{\log 5}{\log 6}=\frac{\log\frac{10}{2}}{\log(3\times 2)}=\frac{\log 10-\log 2}{\log 3+\log 2}=\frac{1-a}{a+b}$

22. 試求$(\log_3 4+\log_{27}16)(\log_4 9-\log_{16}3)$的值為＿＿＿＿＿＿。

【中】

【臺中女中段考】

解答 $\frac{5}{2}$

解析 所求 $=(\frac{\log 4}{\log 3}+\frac{\log 16}{\log 27})(\frac{\log 9}{\log 4}-\frac{\log 3}{\log 16})=(\frac{2\times\log 2}{\log 3}+\frac{4\times\log 2}{3\times\log 3})(\frac{2\times\log 3}{2\times\log 2}-\frac{\log 3}{4\times\log 2})$

$=(\frac{10}{3}\times\frac{\log 2}{\log 3})(\frac{3}{4}\times\frac{\log 3}{\log 2})=\frac{5}{2}$ 。

23. J 島國 311 核災造成輻射感染時，其感染速度的數學模式為 $N\approx 200(1+100^{0.03x})$，其中自然數 N 表示受感染人數，自然數 x 表示災後天數。已知近似值 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$，請估算災後至少__________天會有一萬人以上受到輻射感染。

【中】

【建國中學段考】

解答 29

解析 因為 $\log 7\approx 0.8451$，所以 $7\approx 10^{0.8451}$，

$200\times(1+100^{0.03x})\ge 10000\Rightarrow 1+100^{0.03x}\ge 50\Rightarrow 10^{0.06x}\ge 49\approx(10^{0.8451})^2$

$\Rightarrow 0.06x\ge 0.8451\times 2\Rightarrow x\ge\frac{0.8451}{0.06}\times 2\approx 28.17$，故為 29 天後。

24. 若 $|\overrightarrow{a}|=2$、$|\overrightarrow{b}|=3$、$|\overrightarrow{c}|=4$ 且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 方向上的投影長度為__________。

【難】

【臺南女中段考】

解答 $\frac{21}{8}$

解析 因為 $|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|^2=|-\overrightarrow{a}|^2$，

所以 $|\overrightarrow{b}|^2+|\overrightarrow{c}|^2+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=|\overrightarrow{a}|^2\Rightarrow 9+16+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=4\Rightarrow\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-\frac{21}{2}$，

因此 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 方向上的投影長度為

$|\overrightarrow{b}||\cos\theta|=|\overrightarrow{b}|\times\frac{|\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}=\frac{|\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{c}|}=\frac{|-\frac{21}{2}|}{4}=\frac{21}{8}$ 。

25. 方程式 $\sin x+|\sin x|=\frac{x}{5}$ 的實數解個數有__________個。

【難】

【文華高中段考】

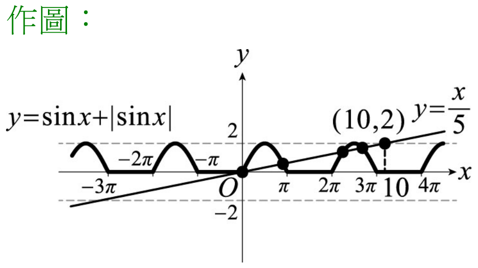
解答 4

解析 求 $\sin x+|\sin x|=\frac{x}{5}$ 的實根個數

$\Leftrightarrow$ 求 $\begin{cases}y=\sin x+|\sin x|\\ y=\frac{x}{5}\end{cases}$ 兩方程式圖形的交點個數。

$y=\sin x+|\sin x|=\begin{cases}2\sin x，若 \sin x\ge 0\\ 0，若 \sin x<0\end{cases}$ 。

作圖：



故 $\sin x+|\sin x|=\frac{x}{5}$ 有 4 個實根。

26. 某食品實驗室混合甲、乙兩種菌類製成一種新食品。調查後發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍（成為原來的四倍）。現在取同數量的甲、乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第__________天後混合甲、乙兩種菌類才能製成受歡迎的食品。

【難】

【龍騰自命題】

解答 10

解析　設甲菌與乙菌開始均為 A 個，則 n 天後，
甲菌的數量為 $A(1+1)^n = A\times 2^n$，
乙菌的數量為 $A(1+3)^n = A\times 4^n$，
乙菌總數是甲菌總數 1000 倍以上時，
$A\times 4^n \ge 1000\times A\times 2^n$，得 $2^n \ge 1000$，知 $n\ge 10$。

27. 已知向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $60°$，且 $|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$。若 $\vec{a}+t\vec{b}$ 與 $\vec{a}-2\vec{b}$ 互相垂直，求實數 t 的值= ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

【易】
【SUPER 講義】

解答　$\frac{3}{5}$

解析　因為 $\vec{a}+t\vec{b}$ 與 $\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，

所以 $\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=0$

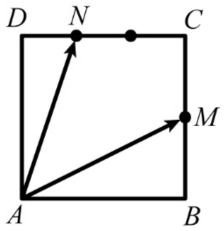
$\Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{b}-2t\left|\vec{b}\right|^2=0$

$\Rightarrow 3^2+(t-2)(3\times 2\times\cos 60°)-2t\times 2^2=0$

$\Rightarrow 3-5t=0$，

解得 $t=\frac{3}{5}$。

28. 如圖，已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 6，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，N 為 $\overline{CD}$ 的三等分點。



(1) 求 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ = ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

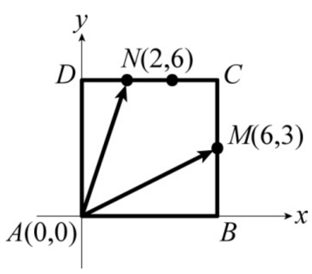
(2) 求 $\angle NAM$ = ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

【中】
【課本隨堂練習】

解答　(1)30　(2)45°

解析　(1) 將圖形放在坐標平面上，並標示 A，M，N 的坐標，如圖所示。

因為 $\overrightarrow{AM}=(6,3)$，$\overrightarrow{AN}=(2,6)$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=6\times 2+3\times 6=30$。



(2) 因為 $\cos\angle NAM=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AN}\right|}=\dfrac{30}{\sqrt{45}\times\sqrt{40}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\angle NAM=45°$。

29. 解不等式 $2^{x+1}+2^{2-x}-6<0$，得 x 範圍為＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

【中】
【SUPER 講義】

解答　$0<x<1$

解析　令 $t=2^x$（$t>0$）。因為 $2^{x+1}=2\times 2^x=2t$，

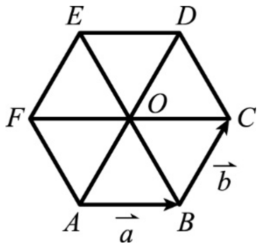
且 $2^{2-x}=\frac{4}{2^x}=\frac{4}{t}$，所以不等式可化為 $2t+\frac{4}{t}-6<0$，

即 $2t^2-6t+4<0$，因式分解得 $2(t-1)(t-2)<0$，

解得 $1<t<2$。因為 $t=2^x$，即 $2^0<2^x<2^1$，

底數 $2>1$，所以 $0<x<1$。

30. 設 $ABCDEF$ 是正六邊形，且令 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$ 。試用 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 表示下列各向量：



(1) $\overrightarrow{AE}$ =__________。

(2) $\overrightarrow{EC}$ =__________。

(3) $3\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{EC}$ =__________。

【中】
【龍騰自命題】

解答　(1) $-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$

(2) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

(3) $-7\overrightarrow{a}+8\overrightarrow{b}$

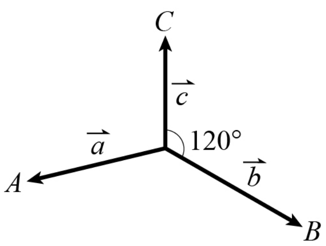
解析　(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{b}+\left(-\overrightarrow{a}\right)=-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 。

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\left(-\overrightarrow{b}\right)+2\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 。

(3) $3\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{EC}=3\left(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)-2\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=-7\overrightarrow{a}+8\overrightarrow{b}$ 。

三 、 混合題 (3 題)

1. 韓國某綜藝節目有一集的遊戲為「三角拔河」，設 A、B、C 三人仿照遊戲進行拔河，如圖所示，已知三人呈現平衡狀態，並令 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 分別為 A、B、C 的拉力，試回答下列問題：



(1) 下列何者與 $\overrightarrow{a}$ 相等？（單選題）

(A) $\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$　(B) $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$　(C) $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$　(D) $-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$　(E) $-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$

(2) 已知 B、C 的拉力分別為 20、15 公斤重，且兩人拉力的夾角為 $120°$ ，求 A 的拉力。(非選擇題)

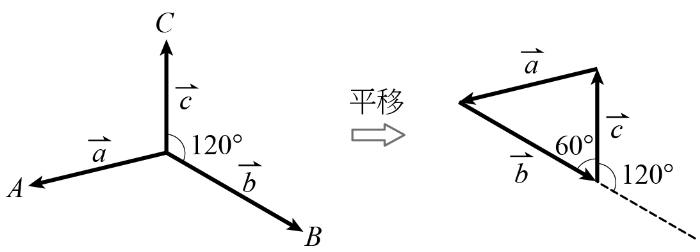
【易】
【仿課本類題】

解答　(1)D　(2) $5\sqrt{13}$ 公斤重

解析　(1) 因為三人呈現平衡狀態，所以 A、B、C 的拉力之合力為零，

即 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ ，因此可得 $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$

(2)



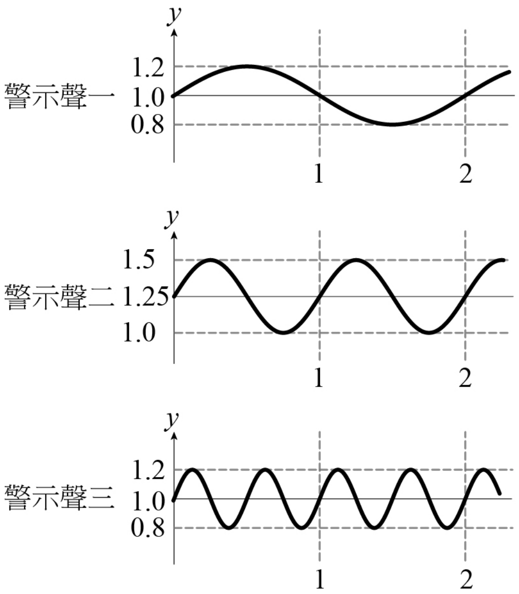
將 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 平移後，$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 形成一個三角形，如圖所示，

由 $\left|\overrightarrow{b}\right|=20$ 且 $\left|\overrightarrow{c}\right|=15$ ，利用餘弦定理，

得 $\left|\overrightarrow{a}\right|^2=\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2-2\left|\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{c}\right|\cos 60°=20^2+15^2-2\times20\times15\times\frac{1}{2}$ ，

解得 $\left|\overrightarrow{a}\right|=5\sqrt{13}$ ，故 A 的拉力為 $5\sqrt{13}$ 公斤重。

2. 救護車出勤時為了提醒車輛讓道，有三種鳴笛聲示警，以下圖中正弦函數的波形示意三種警示聲：



警示聲一：音頻較低，用於一般救護案件，週期為 2 秒，音量為 80~120 分貝。
警示聲二：音頻較高，用於隨同消防車出勤、較緊急的狀況，週期為 1 秒，音量提高為 100~150 分貝。
警示聲三：音頻最高，用於救護行進中示意前方車輛讓道的警示，週期為 0.5 秒，音量為 80~120 分貝。

已知圖形中 y 軸代表聲音強度（單位：百分貝），x 軸代表時間（單位：秒），且警示聲一的波形函數為 $y=\frac{1}{5}\sin(\pi x)+1$，試回答下列問題：

(1) 下列選項何者為警示聲三的波形函數？（單選題）

(A) $y=\frac{4}{5}\sin(\pi x)+1$　(B) $y=\frac{1}{20}\sin(\pi x)+1$　(C) $y=\frac{1}{5}\sin(4\pi x)+1$

(D) $y=\frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$　(E) $y=\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$

(2) 已知警示聲二的波形函數為 $y=a\sin(b\pi x)+1.25$，且 $a>0$、$b>0$，則數對 $(a,b)=$＿＿＿＿＿＿。（非選擇題）

【中】
【仿課本類題】

解答　(1)C　(2) $(\frac{1}{4},2)$

解析　(1) 因為與警示聲一相比，警示聲三的波形振幅不變、週期變為 $\frac{1}{4}$ 倍，

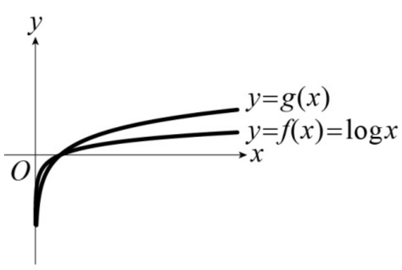
所以警示聲三的波形函數為 $y=\frac{1}{5}\sin(4\times\pi x)+1$

(2) 因為與警示聲一相比，警示聲二的波形振幅變為 $\frac{5}{4}$ 倍、週期變為 $\frac{1}{2}$ 倍，

且往上平移 0.25 單位，所以警示聲二的波形函數為

$y=\frac{5}{4}\times\frac{1}{5}\sin(2\times\pi x)+1.25=\frac{1}{4}\sin(2\pi x)+1.25$，故數對 $(a,b)=(\frac{1}{4},2)$。

3. 附圖為 $y=f(x)=\log x$ 與 $y=g(x)$的部分圖形，請回答下列問題。



(1) 下列各選項中，請選出最有可能為 $g(x)$。（單選題）　(A)$\log(x+2)$　(B)$\log(2x)$　(C)$2\log x$　(D)$-\log x$　(E)$(\log 2)\cdot(\log x)$

(2) 根據(1)的答案，試解不等式 $f(7x+3)-g(x)\le f(3)+g(\sqrt{2})$。（非選擇題）

【中】
【龍騰自命題】

解答　(1)C　(2) $x\ge\frac{3}{2}$

解析　(1) 觀察得知，$y=g(x)$的每個函數值約為 $y=f(x)$函數值的兩倍，

故 $g(x)=2\log x$。

(2) 不等式 $f(7x+3)-g(x)\le f(3)+g(\sqrt{2})$

$\Rightarrow \log(7x+3)-2\log x\le \log 3+2\log\sqrt{2}$

$\Rightarrow \log(7x+3)-\log x^2\le \log 6 \Rightarrow \log\dfrac{7x+3}{x^2}\le \log 6 \Rightarrow \dfrac{7x+3}{x^2}\le 6$

$\Rightarrow 7x+3\le 6x^2 \Rightarrow 6x^2-7x-3\ge 0 \Rightarrow (2x-3)(3x+1)\ge 0 \Rightarrow x\ge\dfrac{3}{2}$ 或 $x\le -\dfrac{1}{3}$，

因為真數必須為正數，所以 $7x+3>0$ 且 $x>0$，故 $x>0$，

綜合以上可知：$x\ge\dfrac{3}{2}$。