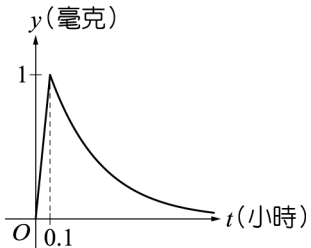


一、多重選擇題：

1. () 阿佩與小珍將老師指派的功課 $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ 分別疊合成 $a\sin(bx+c)$ 與 $d\cos(ex+f)$ ，已知 $a, b, d, e > 0, 0 < c, f < 2\pi$ ，則下列哪些是正確的？
- (A) $b=e$
- (B) $f=\frac{\pi}{6}$
- (C) $c=\frac{\pi}{3}$
- (D) 當 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 時， $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的最小值為 0
- (E) 當 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 時， $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的最大值為 2
2. () 下列有關三角函數圖形的平移與伸縮，哪些敘述是正確的？
- (A) $y=\sin(x+2)$ 的圖形可利用 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 2 徑得到
- (B) $y=\sin(2x-2)$ 的圖形可利用 $y=\sin x$ 的圖形先向右平移 2 徑，再以 y 軸為中心，水平方向伸縮 2 倍得到
- (C) $y=\sin(2x-2)$ 的圖形可利用 $y=\sin x$ 的圖形先以 y 軸為中心，水平方向伸縮 2 倍，再向右平移 2 徑得到
- (D) $y=2\sin x-3$ 的圖形可利用 $y=\sin x$ 的圖形先以 x 軸為中心，鉛直方向伸縮 2 倍，再向下平移 3 單位得到
- (E) $y=2\sin x-3$ 的圖形可利用 $y=\sin x$ 的圖形先向下平移 3 單位，再以 x 軸為中心，鉛直方向伸縮 2 倍得到。
3. () 下列哪些選項的值等於 $\frac{1}{2}$ ？
- (A) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$
- (B) $\sin 17^\circ \cos 103^\circ + \cos 17^\circ \sin 103^\circ$
- (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 15^\circ - \cos 75^\circ)$
- (D) $\sqrt{\frac{1-\cos 420^\circ}{2}}$
- (E) $1-2\cos^2 150^\circ$
4. () 設 (a, b) 為 $y=\log_2 x$ 圖形上的一點，請選出正確的選項。
- (A) $(2a, 2b)$ 亦為 $y=\log_2 x$ 圖形上的一點
- (B) $(a, -b)$ 為 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形上的一點
- (C) (a^2, b^2) 亦為 $y=\log_2 x$ 圖形上的一點
- (D) $(2a, 2b)$ 亦為 $y=2^x$ 圖形上的一點
- (E) (b, a) 為 $y=2^x$ 圖形上的一點。
5. () 在平面上，已知 $\overrightarrow{a} = (23, 50)$ 與 $\overrightarrow{b} = (41, 89)$ 所張出的平行四邊形面積為 3，試問下列哪些選項是正確的？
- (A) $\overrightarrow{a}$ 和 $5\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 15
- (B) $\overrightarrow{a}$ 和 $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 6
- (C) $-3\overrightarrow{a}$ 和 $2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形為 36
- (D) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 6。
6. () 設 A, B, P 為平面上相異三點，若 O 點不在直線 AB 上，試問下列各題中， A, B, P 三點是否共線？
- (A) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AP}$
- (B) $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$
- (C) $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{6}{5}\overrightarrow{OB}$
- (D) $2\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
- (E) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{17}{5}\overrightarrow{BP}$ 。

二、填充題（每題 1 分，共 40 分）

1. 為了預防新型冠狀病毒（COVID-19）的傳染，藍天高中對學校教室使用消毒液進行消毒。如圖所示，已知消毒液開始噴灑時，室內每立方公尺空氣中含藥量 y （毫克），與時間 t （小時）成正比；6 分鐘消毒液噴灑完畢後， y 與 t 的函數關係為： $y = \left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$ ，其中 a 為常數。根據消毒液性質，當空氣中每立方公尺的含藥量不大於 0.125 毫克時，學生方可進教室，那麼從開始噴灑消毒液，至少需經過【 】分鐘才能進教室。



2.目前國際上通用芮氏規模（ M ）來描述地震強度。若（ E ）代表地震所釋放出來的能量（單位爾格），我們根據地震學家所提出的公式會有： $\log E=11.8+1.5M$ ，已知民國 88 年集集大地震的規模是 7.6，而日本 311 大地震的規模是 9.0，若日本 311 大地震所釋出的能量是集集大地震的 10^T 倍，則 $T=$ 【 】。

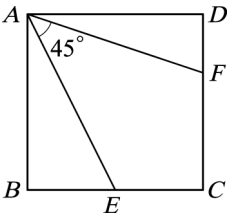
3. 設 k 為一常數，且二元一次聯立方程式 $\begin{cases} (k^2-1)x+3ky=k-3 \\ (k+1)x+2y=k+1 \end{cases}$ 無解，則 $k=$ 【 】。

4. 設點 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點， $\triangle ABP$ 面積： $\triangle BCP$ 面積： $\triangle CAP$ 面積= $1:2:3$ ，且 $x,y\in \mathbb{R}$ ， $(2x+3y-2)\overrightarrow{PA}+(4x+y+3)\overrightarrow{PB}+(2x-y+3)\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ ，則數對 $(x,y)=$ 【 】。

5. 求 $\log_3(2+\sqrt{3})-\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{6+3\sqrt{3}})$ 的值為【 】。

6. 設 $a=\log_{15}2$ ， $b=\log_{15}3$ ，試以 $a、b$ 表示指數方程式 $10^{x+1}=6^x$ 的解 $x=$ 【 】。

7. 如右圖，在正方形 $ABCD$ 中，若點 $E、F$ 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 邊上的點且滿足 $3\overline{DF}=\overline{AD}$ 及 $\angle FAE=45^\circ$ ，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=$ 【 】。



8. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=6$ 且 $\angle A=2\angle C$ ，則 $\overline{AC}=$ 【 】。

9. 根據過去長期統計資料顯示，房仲業銷售員的年資 x （年）與銷售成功的機率 $y=f(x)$ 有以下關係式： $y=f(x)=\frac{2^{-4+x}}{1+2^{-4+x}}$ ，若某建商推出一建案，希望銷售成功的機率至少有 99 %時，則需要派出至少年資【 】（取整數）年的銷售員。

10. 若方程式 $x^{2\log x}=\frac{x^3}{10}$ ，則 $x=$ 【 】。

11. 已知 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 有唯一解為 $(2,3)$ ，則 $\begin{cases} 2a_1x+3b_1y=4c_1 \\ 2a_2x+3b_2y=4c_2 \end{cases}$ 之解 (x,y) 為【 】。

12. 設 $-\pi\leq x\leq \pi$ ，方程式 $\sin x+\frac{x}{4}=1$ 有【 】個相異實數解。

13. 設函數 $f(x)=(\log_2x)^2-\log_2x^4+3$ ，其中 $\frac{1}{4}\leq x\leq 16$ ，若 $f(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求數對 $(M,m)=$ 【 】。

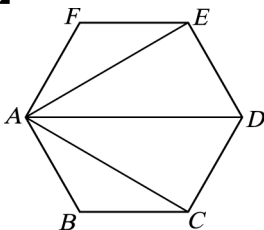
14. 已知有定點 $A(2,0)$ 、 $B(12,0)$ 及位於第一象限的 $P、Q$ 兩點，已知點 P 滿足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 且 $\overline{PB}=6$ ，而點 Q 滿足 $\overline{QA}=\overline{QB}$ 且三角形 QAB 的面積為 25，求三角形 APQ 的面積為【 】。

15. 設 $x、y、z>1$ ，若 $\log_xa=24$ ， $\log_ya=40$ ， $\log_{xyz}a=12$ ，求 $\log_za=$ 【 】。

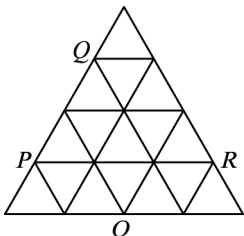
16. $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{AC}=5$ ， $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ ， P 為 $\overline{BD}$ 中點，求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$ 【 】。

17. 若要使「以 $\log_2x$ 為底數時， $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ 的對數」有意義，則 x 的範圍為【 】。

18. 如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|$ ，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=$ 【 】。

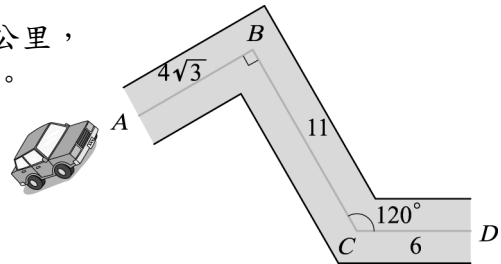


19. 如圖所示，每個小三角形均為正三角形，若 $\overrightarrow{OR}=x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}$ ，則 $x+y=$ 【 】。



20. 設指數函數 $y=a^x$ 的圖形上有三點 (p,q) ， (r,s) ， (u,v) 。已知 $r-p=2$ ， $u-r=3$ ，且 $s=9q$ 。試求 $\frac{v}{s}$ 之值為【 】。

21. 一公路依地形迂迴而建，如右圖所示。從 A 地到 B 地， B 地到 C 地， C 地到 D 地，距離分別是 $4\sqrt{3}$ ，11，6 公里，而 AB 與 BC ， BC 與 CD 間，兩公路的夾角分別是 90° ， 120° ，則 A 地到 D 地的直線距離為【 】公里。

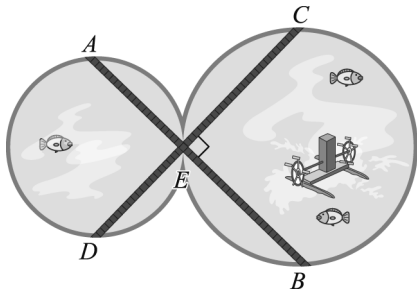


22. 已知 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ，且 $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin 2020^\circ$ ，則 $x =$ 【 】。

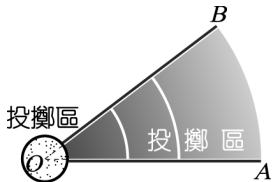
23. 設 $x > 1$ ， $f(x) = \log_4\left(\frac{x^2}{8}\right) + \log_x\left(\frac{8}{\sqrt{x}}\right)$ ，則 $f(x)$ 的最小值為【 】。

24. 設 $a=3^{60}$ ， $b=4^{40}$ ， $c=5^{30}$ ，則 a, b, c 之大小關係【 】。

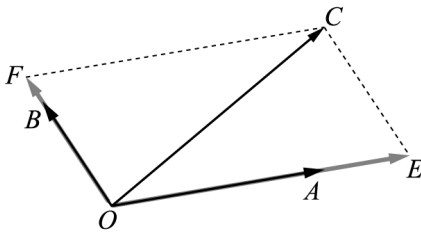
25. 如圖的兩個圓形魚塭相切於 E 點，直徑分別為 60 公尺與 80 公尺，今欲搭建兩便橋 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ ，且兩便橋均通過 E 點，且互相垂直，試求兩便橋長度之和的最大值為【 】。



26. 如圖所示，鉛球比賽場地中，如果不計標線的寬度，建立一直角坐標系，使 O 為原點， A, B 兩點的坐標分別為 $(20, 0)$ ， $(16, 12)$ ，試求 $\widehat{AB}$ 的中點坐標為【 】。



27. 如圖， $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ ， $\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{OF} = y\overrightarrow{b}$ ，且 $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ ， $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 5， $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 6， $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 7，則 $y =$ 【 】。



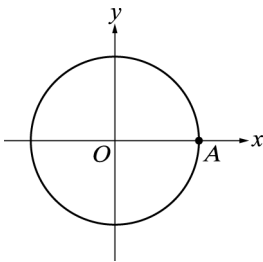
28. 已知 $3^x + 2\log_{10} y = 7$ 且 $3^{x+1} + \log_{10} y^4 = 17$ ，試求 $\log_{10} xy =$ 【 】。

29. 假設聲音的強度為 F ，則科學家定義 r （貝爾） $= \log F$ 作為度量聲音強度的單位，例如：兩個噪音的響度差 1 貝爾，則他們的聲音強度剛好為 1 與 10 的比。若高聲的談話是 6.5 貝爾，獅子的咆嘯聲是 8.7 貝爾，則獅子咆嘯聲的強度是高聲談話聲的【 】倍。（以整數回答，以下四捨五入， $\log 6.5 \approx 0.8129$ ， $\log 8.7 \approx 0.9395$ ， $\log 1.584 \approx 0.2$ ）

30. 設半徑 r 之球表面積 $S = 4\pi r^2$ 與體積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 均能成立，求關係式 $\log V = a\log S + b\log \pi + c\log 6$ 中，常數 a, b, c 的值。

三、混合題：

1. 將一繩長為 100 公分的繩子一端固定在 A 點上，將此繩子一圈一圈依逆時針方向纏繞在如圖的圓形輪上(不計繩子的寬度)，輪子的半徑是 5 公分，且繩子的另一端點為 B ，則：
- (1) B 點在第幾象限？
- (2) B 點到 x 軸的垂直距離為多少公分？（單選） (A) $5\sin 100$ (B) $5\sin 20$ (C) $5\cos 100$ (D) $5\cos 20$ (E) $2\sin 20$ 。

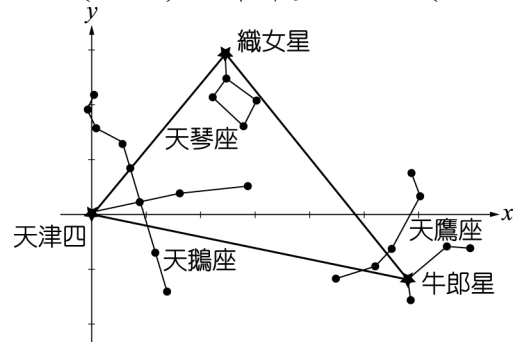


2. 某銀行推出 10 年儲蓄專案如下：一次存 100 萬元、年利率為 2.5 %、每年計息 2 次，十年後期滿一次領回本利和。
- (1) 以單利計息，期滿一次領回本利和金額為多少？（單選） (A) 115 萬 (B) 120 萬 (C) 125 萬 (D) 130 萬 (E) 135 萬。
- (2) 已知 $\log 2 \approx 0.30102$ ， $\log 3 \approx 0.47712$ ， $\log 1.2825 \approx 0.10806$ ， $\log 1.2830 \approx 0.10823$ ， $\log 1.2835 \approx 0.10839$ ， $\log 1.2840 \approx 0.10857$ ， $\log 1.2845 \approx 0.10873$ 。以複利計算，期滿一次領回本利和金額為多少？四捨五入至千元。

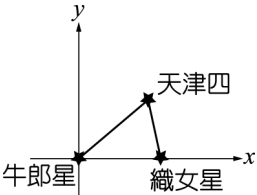
3. 某高中天文社成員欲觀測月球亮面的比例，從某日開始每隔兩個夜晚在同一時間拍攝月球照片，並計算月球亮面比例，他們的觀測資料如表所示：
- 假設用正弦函數 $y = a\sin[b(x-h)] + k$ （其中 a, b 為正數， $0 < h < 30$ ）來描述這筆觀測資料，且滿足下面兩條件：
- ① 資料點 $(22, 1)$ 和 $(8, 0)$ 落在圖形上。
- ② 資料點 $(22, 1)$ 和 $(8, 0)$ 依次為圖形相鄰的最高點與最低點。
- 則：
- (1) 此圖形的週期下列何者？（單選） (A) 14 (B) 28 (C) 16 (D) 32 (E) 30。
- (2) 求序組 $(a, b, h, k) =$ ？

開始觀察後的 x 日	0 日	2 日	4 日	6 日	8 日	10 日
月球亮面比例 (%)	42	24	10	2	0	8
開始觀察後的 x 日	12 日	14 日	16 日	18 日	20 日	22 日
月球亮面比例 (%)	23	43	66	85	97	100
開始觀察後的 x 日	24 日	26 日	28 日	30 日		
月球亮面比例 (%)	92	97	60	41		

4. 夏季星空中，最引人注目的大概就是由天琴座的織女星、天鷹座的牛郎星和天鵝座的天津四這三顆亮星組成的夏季大三角，今將之放在直角坐標平面上，使得天津四位於原點 $O(0,0)$ ，織女星位於 $A(5,6)$ ，牛郎星位於 $B(11.7,-2.4)$ 。試回答下列各題：



- (1) 在坐標平面上，若將天津四、牛郎星、織女星和北極星連起來，約略可形成一個平行四邊形，其中天津四和織女星恰為此平行四邊形其中一條對角線的兩端點，則北極星的坐標為何？
- (2) 小谷有一張繁星點點的圖，他依稀覺得這是張夏季星空圖，且圖中最亮的兩顆星應該就是牛郎星和織女星，小谷想從星圖中找出天津四，於是他想了一個辦法：若將上一題的 $\overrightarrow{BO}$ 寫成 $k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{v}$ ，其中 $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{BA}$ ，先求出 k 的值，再將小谷的星空圖放在另一個直角坐標系上，且將兩顆亮星「牛郎星」和「織女星」分別放在原點 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 。利用這個方法，小谷可以在哪一條鉛直線的附近找到天津四？（單選）



- (A) $x=0.7$ (B) $x=0.75$ (C) $x=0.8$ (D) $x=0.85$ (E) $x=0.9$ 。