國立臺灣師範大學附屬高級中學 112 學年度 高二數學A寒假作業 參考答案

一、多重選擇題

1.答案：(A)(E)

解析：$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow a=2$，$b=1$，$c=\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\cos\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)\Rightarrow d=2$，$e=1$，$f=\frac{5\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\frac{1}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Rightarrow 1\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 2$

$\therefore\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的最小值為 1，最大值為 2

故選(A)(E)

2.答案：(D)

解析：(A)╳：應為向左平移 2 弳

(B)╳：$y=\sin x\xrightarrow[2\text{弳}]{\text{向右平移}}y=\sin(x-2)$

$\xrightarrow[2\text{倍}]{\text{水平伸縮}}y=\sin\left(\frac{1}{2}x-2\right)$

(C)╳：$y=\sin x\xrightarrow[2\text{倍}]{\text{水平伸縮}}y=\sin\frac{1}{2}x$

$\xrightarrow[2\text{弳}]{\text{向右平移}}y=\sin\frac{1}{2}(x-2)=\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

(D)○：$y=\sin x\xrightarrow[2\text{倍}]{\text{鉛直伸縮}}y=2\sin x$

$\xrightarrow[3\text{單位}]{\text{向下平移}}y=2\sin x-3$

(E)╳：$y=\sin x\xrightarrow[3\text{單位}]{\text{向下平移}}y=\sin x-3$

$\xrightarrow[2\text{倍}]{\text{鉛直伸縮}}y=2(\sin x-3)=2\sin x-6$

故選(D)

3.答案：(A)(C)(D)

解析：(A)○：$2\sin 75^\circ\cos 75^\circ=\sin(2\times 75^\circ)=\sin 150^\circ$

$=\sin(180^\circ-30^\circ)$

$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

(B)╳：$\sin 17^\circ\cos 103^\circ+\cos 17^\circ\sin 103^\circ$

$=\sin(17^\circ+103^\circ)=\sin 120^\circ$

$=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C)○：$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 15^\circ-\cos 75^\circ)$

$=\sin 75^\circ\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos 75^\circ\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sin 75^\circ\cos 45^\circ-\cos 75^\circ\sin 45^\circ$

$=\sin(75^\circ-45^\circ)=\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}$

(D)○：$\sqrt{\frac{1-\cos 420^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-(1-2\sin^2 210^\circ)}{2}}$

$=\sqrt{\sin^2 210^\circ}=|\sin 210^\circ|$

$=|\sin(180^\circ+30^\circ)|$

$=|-\sin 30^\circ|=\frac{1}{2}$

(E)╳：$1-2\cos^2 150^\circ=1-2\cos^2 30^\circ$

$=1-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-2\times\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

故選(A)(C)(D)

4.答案：(B)(E)

解析：$(a，b)$ 在 $y=\log_2 x$ 上，即 $b=\log_2 a\Rightarrow a=2^b$

(A)╳：反例：$(a，b)=(8，3)$ 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，

但 $(16，6)$ 不在 $y=\log_2 x$ 的圖形上

(B)○：$\log_{\frac{1}{2}} a=-\log_2 a=-b$，故 $(a，-b)$ 在 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形上

(C)╳：反例：$(a，b)=(2，1)$ 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，

但 $(4，1)$ 不在 $y=\log_2 x$ 的圖形上

(D)╳：反例：$(a，b)=(2，1)$ 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上，

但 $(4，2)$ 不在 $y=2^x$ 的圖形上

(E)○：$2^b=a$，故 $(b，a)$ 在 $y=2^x$ 的圖形上

故選(B)(E)

5.答案：(A)(C)(D)

解析：$\overrightarrow{a}=(23，50)$，$\overrightarrow{b}=(41，89)$ 所張出的平行四邊形面積 $=\left|\begin{vmatrix}23&41\\50&89\end{vmatrix}\right|=3$

(A)○：$\overrightarrow{a}$ 和 $5\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}23&5\times41\\50&5\times89\end{vmatrix}\right|=5\left|\begin{vmatrix}23&41\\50&89\end{vmatrix}\right|=5\times3=15$

(B)╳：$\overrightarrow{a}$ 和 $(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 所張出的平行四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}23&2\times23+41\\50&2\times50+89\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}23&41\\50&89\end{vmatrix}\right|=3$$

$\times(-2)$

(C)○：$-3\overrightarrow{a}$ 和 $(2\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b})$ 所張出的平行四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}-3\times23&2\times23+4\times41\\-3\times50&2\times50+4\times89\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}-3\times23&4\times41\\-3\times50&4\times89\end{vmatrix}\right|=12\left|\begin{vmatrix}23&41\\50&89\end{vmatrix}\right|=12\times3=36$$

$\times\frac{2}{3}$

(D)○：$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 和 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ 所張出的平行四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}23+41&23-41\\50+89&50-89\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}23+41&2\times23\\50+89&2\times50\end{vmatrix}\right|=2\left|\begin{vmatrix}23+41&23\\50+89&50\end{vmatrix}\right|$$

$\times1$　　　　$\times(-1)$

$$=2\left|\begin{vmatrix}41&23\\89&50\end{vmatrix}\right|=2\left|-\begin{vmatrix}23&41\\50&89\end{vmatrix}\right|=2\left|\begin{vmatrix}23&41\\50&89\end{vmatrix}\right|=2\times3=6$$

故選(A)(C)(D)

6.答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：(A)○：$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AP}$，則 $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AP}$，故 $A，B，P$ 三點共線

(B)○：$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　$\because\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$　$\therefore P，A，B$ 三點共線

(C)○：$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{5}\overrightarrow{OB}$　$\because-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}=1$　$\therefore P，A，B$ 三點共線

(D)○：$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$　$\because\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$　$\therefore P，A，B$ 三點共線

(E)○：$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\frac{17}{5}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}+\frac{17}{5}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}-\frac{17}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{17}{5}\overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}=\frac{22}{5}\overrightarrow{OB}-\frac{17}{5}\overrightarrow{OP}$　$\because\frac{22}{5}+\left(-\frac{17}{5}\right)=1$　$\therefore P，A，B$ 三點共線

故選(A)(B)(C)(D)(E)

二、填充題

1.答案：51

解析：$y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$ 過（t，y）＝（0.1，1）$\Rightarrow 1=\left(\frac{1}{16}\right)^{0.1-a}$ $\Rightarrow a=0.1$ $\therefore y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}$

設 t 小時後，每立方公尺的含藥量不大於 0.125 毫克

$\therefore \left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}\leq 0.125$

$\Rightarrow (2^{-4})^{t-0.1}\leq 2^{-3}$

$\Rightarrow -4(t-0.1)\leq -3$

$\Rightarrow t-0.1\geq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow t\geq 0.75+0.1=0.85$（小時）

$\Rightarrow 0.85\times 60=51$（分鐘）

2.答案：2.1

解析：設日本 311 大地震的能量為 E_1，集集大地震的能量為 E_2

$\therefore \begin{cases}\log E_1=11.8+1.5\times 9.0\cdots\cdots\text{①}\\ \log E_2=11.8+1.5\times 7.6\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

由①－②得 $\log E_1-\log E_2=1.5\times(9.0-7.6)$
$=1.5\times 1.4$
$=2.1$

$\Rightarrow \log\frac{E_1}{E_2}=2.1$

$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=10^{2.1}$

$\Rightarrow T=2.1$

3.答案：-1，-2

解析：聯立方程式無解，則 $\Delta=\begin{vmatrix}k^2-1 & 3k\\ k+1 & 2\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 2k^2-2-3k(k+1)=0\Rightarrow (k+1)(k+2)=0\Rightarrow k=-1，-2$

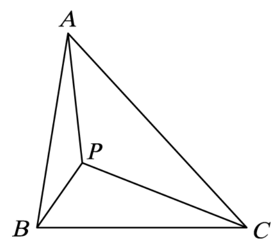
（1）$k=-1$ 時，$\begin{cases}-3y=-4\\ 2y=0\end{cases}$ 為兩平行直線，無解

（2）$k=-2$ 時，$\begin{cases}3x-6y=-5\\ -x+2y=-1\end{cases}$ 為兩平行直線，無解

因此 $k=-1$，-2

4.答案：（1，2）

解析：



由△ABP 面積：△BCP 面積：△CAP 面積＝1：2：3 可知

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$

故 $(2x+3y-2)\overrightarrow{PA}+(4x+y+3)\overrightarrow{PB}+(2x-y+3)(-2\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow (-2x+5y-8)\overrightarrow{PA}+(-2x+4y-6)\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$

又 P、A、B 不共線

$\Rightarrow \begin{cases}-2x+5y-8=0\\ -2x+4y-6=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

故數對（x，y）＝（1，2）

5.答案：-1

解析：$\log_3(2+\sqrt{3})-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{6+3\sqrt{3}}$

$=\log_3(2+\sqrt{3})-\log_3(6+3\sqrt{3})$

$=\log_3\frac{2+\sqrt{3}}{6+3\sqrt{3}}=\log_3\frac{1}{3}=-1$

6.答案：$\dfrac{a-b+1}{2b-1}$

解析：$10^{x+1}=6^x \Rightarrow \dfrac{10^x}{6^x}=\dfrac{1}{10} \Rightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \log_{15}\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\log_{15}\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow x\log_{15}\dfrac{5}{3}=-\log_{15}10$

$\Rightarrow x\ (\log_{15}5-\log_{15}3)$

$=-\ (\log_{15}2+\log_{15}5)$

$\because 1=\log_{15}15=\log_{15}(3\times5)=\log_{15}3+\log_{15}5$

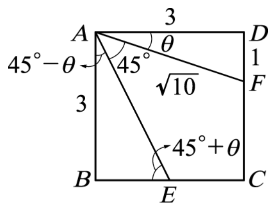
$\Rightarrow \log_{15}5=1-\log_{15}3=1-b$

$\therefore x=\dfrac{-[a+(1-b)]}{(1-b)-b}=\dfrac{-(a+1-b)}{1-2b}=\dfrac{a-b+1}{2b-1}$

7.答案：$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

解析：令 $\overline{DF}=1$，$\overline{AD}=3\overline{DF}=3$，$\overline{AB}=3$

$\Rightarrow \overline{AF}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$



令 $\angle DAF=\theta$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

又 $\sin(45^\circ+\theta)=\sin45^\circ\cos\theta+\cos45^\circ\sin\theta$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

$=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

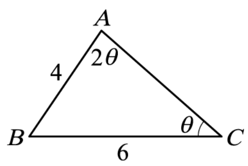
$=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\dfrac{3}{\overline{AE}}$

$\Rightarrow \overline{AE}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

8.答案：5

解析：



令 $\angle C=\theta \Rightarrow \angle A=2\theta$，$\angle B=180^\circ-3\theta$

由正弦定理知

$\dfrac{4}{\sin\theta}=\dfrac{6}{\sin2\theta}\Rightarrow 2\sin2\theta=3\sin\theta$

$\Rightarrow 4\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta$

$\because \sin\theta\neq0\ (\because \theta\neq0)$ $\therefore \cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos B=\cos(180^\circ-3\theta)=-\cos3\theta=-4\cos^3\theta+3\cos\theta=\dfrac{9}{16}$

由餘弦定理得

$\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\dfrac{9}{16}=25\Rightarrow \overline{AC}=5$

9.答案：11

解析：$y=f(x)=\dfrac{2^{-4+x}}{1+2^{-4+x}}=\dfrac{\frac{1}{16}\times 2^{x}}{1+\frac{1}{16}\times 2^{x}}=\dfrac{2^{x}}{16+2^{x}}=1-\dfrac{16}{16+2^{x}}$

則 $1-\dfrac{16}{16+2^{x}}\ge\dfrac{99}{100}\Rightarrow\dfrac{16}{16+2^{x}}\le\dfrac{1}{100}\Rightarrow 2^{x}+16\ge 1600\Rightarrow 2^{x}\ge 1584$

又 $2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，故至少 11 年年資

10.答案：$\sqrt{10}$ 或 10

解析：當 $x>0\Rightarrow x^{2\log x}=\dfrac{x^3}{10}\Rightarrow \log x^{2\log x}=\log\dfrac{x^3}{10}$

$\Rightarrow(2\log x)\log x=3\log x-1\Rightarrow 2(\log x)^2-3\log x+1=0$

$\Rightarrow(2\log x-1)(\log x-1)=0\Rightarrow\log x=\dfrac{1}{2}$ 或 $1\Rightarrow x=\sqrt{10}$ 或 10

11.答案：(4，4)

解析：$\begin{cases}2a_1x+3b_1y=4c_1\\2a_2x+3b_2y=4c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1\left(\dfrac{x}{2}\right)+b_1\left(\dfrac{3y}{4}\right)=c_1\\a_2\left(\dfrac{x}{2}\right)+b_2\left(\dfrac{3y}{4}\right)=c_2\end{cases}$，則 $\dfrac{x}{2}=2$，$\dfrac{3y}{4}=3$

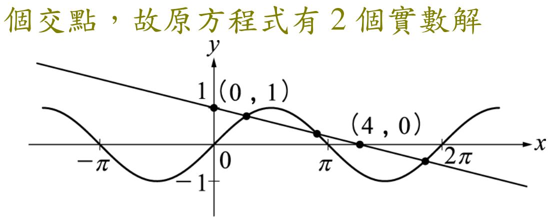
$\Rightarrow(x，y)=(4，4)$

12.答案：2

解析：方程式 $\sin x+\dfrac{x}{4}=1$ 的實數解個數，同兩圖形 $\begin{cases}y=\sin x\\y=1-\dfrac{x}{4}\end{cases}$ 的交點個數

其中直線 $y=1-\dfrac{x}{4}$ 會通過(0，1)，(4，0)兩點

由如圖可知兩圖形在 $-\pi\le x\le\pi$ 有兩個交點，故原方程式有 2 個實數解



13.答案：(15，−1)

解析：$f(x)=(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+3=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3$

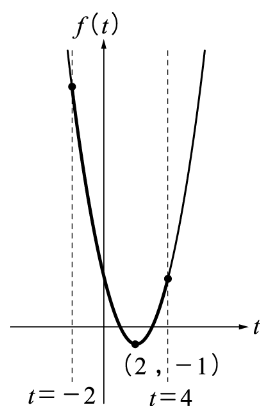
令 $t=\log_2 x$，又 $\dfrac{1}{4}\le x\le 16$ $\therefore\log_2\dfrac{1}{4}\le t\le\log_2 16\Rightarrow -2\le t\le 4$

則 $f(t)=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

當 $t=-2$ 時，$f(t)$ 有最大值 $(-2-2)^2-1=16-1=15$

當 $t=2$ 時，$f(t)$ 有最小值 -1

$\Rightarrow$ 數對 $(M，m)=(15，-1)$



14.答案：4

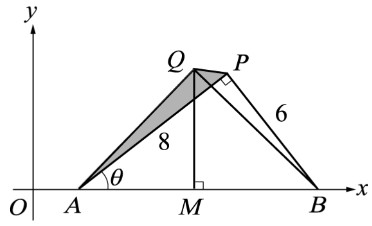
解析：由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 知 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，又 $\overline{PB}=6$，$\overline{AB}=10$

$\Rightarrow \overline{AP}=8$，因此 $\overrightarrow{AP}=(8\cos\theta，8\sin\theta)=\left(8\times\frac{8}{10}，8\times\frac{6}{10}\right)=\left(\frac{32}{5}，\frac{24}{5}\right)$

設 $\overline{AB}$ 中點 M，由 $\overline{QA}=\overline{QB}$ 知 $\overline{QM}\perp\overline{AB}$

又△ABC 面積 $=\frac{1}{2}\times10\times\overline{QM}=25\Rightarrow\overline{QM}=5$，因此 $\overrightarrow{AQ}=(\overline{AM}，\overline{QM})=(5，5)$

故△APQ 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{32}{5} & 5\\ \frac{24}{5} & 5\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}(32-24)=4$



15.答案：60

解析：$\begin{cases}\log_x a=24\\ \log_y a=40\\ \log_{xyz} a=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_a x=\frac{1}{24} & \cdots\cdots ①\\ \log_a y=\frac{1}{40} & \cdots\cdots ②\\ \log_a xyz=\frac{1}{12} & \cdots\cdots ③\end{cases}$

由③－①－②得

$\log_a xyz-\log_a x-\log_a y=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\frac{1}{40}$

$\Rightarrow\log_a\frac{xyz}{xy}=\frac{10-5-3}{120}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$

$\Rightarrow\log_a z=\frac{1}{60}$

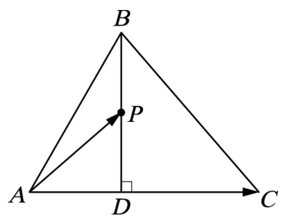
$\Rightarrow\log_z a=60$

16.答案：10

解析：$\because\overline{BD}\perp\overline{AC}$ 且 P 在 $\overline{BD}$ 上　$\therefore\overline{PD}\perp\overline{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AD}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\times\cos60^\circ\times\overline{AC}$

$=4\times\frac{1}{2}\times5=10$



17.答案：$2<x<3$

解析：(1)底數 $\log_2 x\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ \log_2 x>0，\log_2 x\neq1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1，x\neq2\end{cases}\Rightarrow x>1，x\neq2$

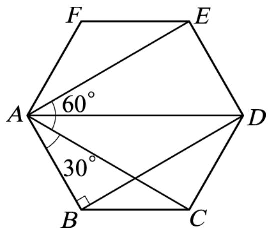
(2)真數 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x-2>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-2)>0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ x-2<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ x<3\end{cases}\Rightarrow2<x<3$

由(1)、(2)得 $2<x<3$

18.答案：$\frac{9}{2}$

解析：



$\because \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|^2$，又 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}|$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|$ ……………（＊）

$\because \angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$

$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}| \times 2 = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$，代入（＊）

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}| \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AC}| = 3$

又 $\angle CAE = 60^\circ$

故 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 3 \times 3 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$

19.答案：$-\frac{1}{2}$

解析：令小三角形邊長為 2，將其坐標化

則 $O(0,0)$，$P(-3,\sqrt{3})$，$Q(-1,3\sqrt{3})$，$R(3,\sqrt{3})$

故 $\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} \Rightarrow (3,\sqrt{3}) = x(-3,\sqrt{3}) + y(-1,3\sqrt{3})$

因此 $\begin{cases} -3x - y = 3 \\ \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

故 $x + y = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

20.答案：27

解析：$\because y = a^x$ 過 (p,q)，(r,s)，(u,v) 三點

$\therefore \begin{cases} a^p = q \cdots\cdots\cdots ① \\ a^r = s \cdots\cdots\cdots ② \\ a^u = v \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

由 $\frac{②}{①}$ 得 $\frac{a^r}{a^p} = \frac{s}{q} \Rightarrow a^{r-p} = \frac{s}{q} \Rightarrow a^2 = \frac{s}{q}$ ……④

由 $\frac{③}{②}$ 得 $\frac{a^u}{a^r} = \frac{v}{s} \Rightarrow a^{u-r} = \frac{v}{s} \Rightarrow a^3 = \frac{v}{s}$ ……⑤

又 $s = 9q$ 代入④得 $a^2 = \frac{9q}{q} = 9$

$\because a > 0 \Rightarrow a = 3$

代入⑤得 $\frac{v}{s} = a^3 = 3^3 = 27$

21. 答案：$7\sqrt{7}$

解析：$\because \overline{AD}=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right|$

由圖知 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角分別是 90°，60°，30°

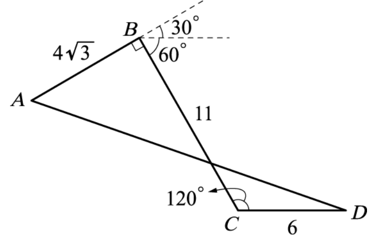
$\therefore \left|\overrightarrow{AD}\right|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=(4\sqrt{3})^2+11^2+6^2+2\times0+2\times11\times6\times\cos60^\circ+2\times4\sqrt{3}\times6\times\cos30^\circ$

$=48+121+36+66+72=343$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{343}=7\sqrt{7}$，故 A 地到 D 地的直線距離為 $7\sqrt{7}$ 公里



22. 答案：$\dfrac{13\pi}{9}$

解析：$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin2020^\circ$

$\Rightarrow 2\sin(x+60^\circ)=2\sin2020^\circ$

$\Rightarrow \sin(x+60^\circ)=\sin2020^\circ$

$\Rightarrow \sin(x+60^\circ)=\sin220^\circ$

又 $180^\circ<x<270^\circ$ 且 $\sin220^\circ=\sin320^\circ$

$\therefore x+60^\circ=320^\circ \Rightarrow x=260^\circ=\dfrac{13\pi}{9}$

23. 答案：$2\sqrt{3}-2$

解析：$f(x)=\log_4\left(\dfrac{x^2}{8}\right)+\log_x\left(\dfrac{8}{\sqrt{x}}\right)$

$=\log_4x^2-\log_48+\log_x8-\log_x\sqrt{x}$

$=\log_2x-\dfrac{3}{2}+3\log_x2-\dfrac{1}{2}=\log_2x+3\log_x2-2$

由算幾不等式知 $f(x)\ge 2\sqrt{\log_2x\times3\log_x2}-2=2\sqrt{3}-2$

$\therefore f(x)$ 的最小值為 $2\sqrt{3}-2$

24. 答案：$a>b>c$

解析：$a=3^{60}=(3^6)^{10}=729^{10}$

$b=4^{40}=(4^4)^{10}=256^{10}$

$c=5^{30}=(5^3)^{10}=125^{10}$

因此 $a>b>c$

25. 答案：$140\sqrt{2}$ 公尺

解析：設小圓圓心 O，$\angle OEA=\theta$

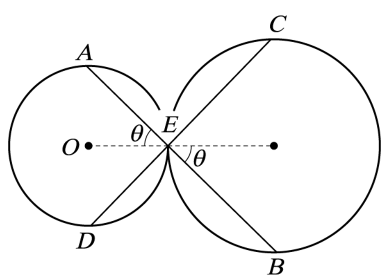
則 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AE}+\overline{EB}+\overline{CE}+\overline{ED}$

$=2\times30\cos\theta+2\times40\cos\theta+2\times40\cos(90^\circ-\theta)+2\times30\cos(90^\circ-\theta)$

$=140\sin\theta+140\cos\theta$

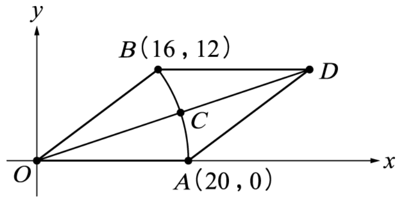
$=140\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

故 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時，兩便橋長度和有最大值 $140\sqrt{2}$ 公尺



26.答案：$(6\sqrt{10}，2\sqrt{10})$

解析：



$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(20，0)+(16，12)=(36，12)$

$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{36^2+12^2}=12\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|=20$

$\therefore \overrightarrow{OC}=\dfrac{20}{12\sqrt{10}}\overrightarrow{OD}=\dfrac{20}{12\sqrt{10}}(36，12)=2\sqrt{10}(3，1)=(6\sqrt{10}，2\sqrt{10})$

即 $\overparen{AB}$ 的中點坐標為 $(6\sqrt{10}，2\sqrt{10})$

27.答案：$\dfrac{6}{5}$

解析：由克拉瑪公式的幾何意義知

$x=\dfrac{\overrightarrow{c}，\overrightarrow{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\overrightarrow{a}，\overrightarrow{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}=\dfrac{7}{5}$

同理

$y=\dfrac{\overrightarrow{a}，\overrightarrow{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\overrightarrow{a}，\overrightarrow{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}=\dfrac{6}{5}$

28.答案：2

解析：$\begin{cases}3^x+2\log_{10}y=7\\3^{x+1}+\log_{10}y^4=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^x+2\log_{10}y=7\\3\times3^x+4\log_{10}y=17\end{cases}$ 解聯立方程組，

得 $3^x=3$，$\log_{10}y=2\Rightarrow x=1$，$y=100\Rightarrow\log_{10}xy=\log_{10}100=2$

29.答案：158 倍

解析：令獅子咆嘯聲的強度為 F_1，高聲談話的強度為 F_2，則 $\begin{cases}\log F_1=8.7\\\log F_2=6.5\end{cases}$

$\Rightarrow \log\dfrac{F_1}{F_2}=\log F_1-\log F_2=2.2\approx\log 100+\log 1.584=\log 158.4$ $\quad\therefore \dfrac{F_1}{F_2}=158.4\approx158$（倍）

30.答案：$a=\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=-1$

解析：$S=4\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$ 代入 $V\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}\right)^3=\dfrac{4\pi}{3}\times\dfrac{S}{4\pi}\times\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}=\dfrac{1}{6}S^{\frac{3}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}$

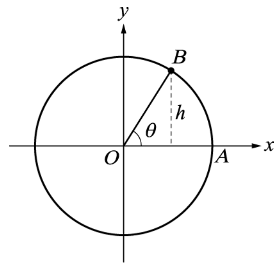
$\therefore \log V=\log(6^{-1}\times S^{\frac{3}{2}}\times\pi^{-\frac{1}{2}})=\dfrac{3}{2}\log S-\dfrac{1}{2}\log\pi-\log 6$

可得 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=-1$

三、混合題

1.答案：（1）第一象限；（2）（B）

解析：（1）∵圓之半徑為 5　∴圓周長為 10π



又 $100-3\times10\pi\approx5.8<2.5\pi=\dfrac{1}{4}\times10\pi$

表 100 公分的繩長繞圓形輪 3 圈剩下 5.8 公分 $\left(\text{不到}\dfrac{1}{4}\text{圈}\right)$

故 B 點在第一象限

（2）由（1）知 $\overset{\frown}{AB}=100-30\pi$

又令 $\angle AOB=\theta\Rightarrow100-30\pi=5\times\theta\Rightarrow\theta=20-6\pi$

故 B 點到 x 軸的距離 $h=\left|\overline{OB}\times\sin\theta\right|=\left|5\times\sin(20-6\pi)\right|=\left|5\sin20\right|=5\sin20$

故選（B）

2.答案：（1）（C）；（2）1284000 元

解析：（1）10 年共計 20 期，每期利息為 $\dfrac{2.5\,\%}{2}=1.25\,\%$

$\Rightarrow$ 10 年後單利計息本利和為 $100\times(1+20\times1.25\,\%)=100\times1.25=125$（萬元）

故選（C）

（2）10 年後複利計息本利和為 $a=100\times(1+1.25\,\%)^{20}$

$\Rightarrow\log a=\log\left[100\times(1.0125)^{20}\right]$，又 $1.0125=\dfrac{81}{80}$

$\Rightarrow\log a=2+20(\log81-\log80)$

$=2+20\left[4\log3-(1+3\log2)\right]$

$\approx2+20(4\times0.47712-1-3\times0.30102)=2.1084$

又 $2+\log1.2835=2.10839<\log a<2+\log1.2840=2.10857$

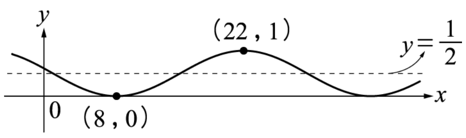
故 1.2835×10^2 萬元 $<a<1.2840\times10^2$ 萬元

$\Rightarrow a=128.4$ 萬元（四捨五入至千元）

故期滿一次領回本利和金額為 1284000 元

3.答案：（1）（B）；（2）$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{14},15,\dfrac{1}{2}\right)$

解析：（1）依題意，作示意圖如圖



$\therefore a=\dfrac{1-0}{2}=\dfrac{1}{2}$

水平線 $y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

$\sin x$ 的最高點和最低點隔了 π 且週期為 2π

此圖形的最高點和最低點隔了 $22-8=14$ 且週期為 28

故選（B）

（2）$\dfrac{2\pi}{b}=28\Rightarrow b=\dfrac{2\pi}{28}=\dfrac{\pi}{14}$

$y=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{14}(x-h)\right)+\dfrac{1}{2}$

（22，1）代入得 $1=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{14}(22-h)\right)+\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{14}(22-h)\right)=1$

$\Rightarrow\dfrac{11\pi}{7}-h\times\dfrac{\pi}{14}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow h\times\dfrac{\pi}{14}=\dfrac{15\pi}{14}\Rightarrow h=15$

$\therefore$ 序組 $(a,b,h,k)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{14},15,\dfrac{1}{2}\right)$

4.答案：(１)（－6.7，8.4）；(２)(D)

解析：(１)〔方法一〕

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\Rightarrow$（$x$，$y$）＝（5－11.7，6－（－2.4））＝（－6.7，8.4），即北極星的坐標為（－6.7，8.4）

〔方法二〕

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow$（－6.7，8.4）＋（－11.7，2.4）＝（$x$－11.7，$y$－（－2.4）），得（$x$，$y$）＝（－6.7，8.4）

(２)$k\overrightarrow{BA}$ 即為 $\overrightarrow{BO}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的正射影，即 $k\overrightarrow{BA}=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|^2}\overrightarrow{BA}$，所以 $k=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|^2}=\dfrac{(-11.7)\times(-6.7)+2.4\times 8.4}{(-6.7)^2+(8.4)^2}\approx 0.85$。若將「牛郎星」往「織女星」的坐標置於（0，0）和（1，0），則天津四的 x 坐標為 k，故可在 $x=0.85$ 鉛直線附近找到天津四，故選(D)