

乘法公式、分式與根式運算

重點聚焦

一、平方展開公式：

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ 。
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$ 。

二、平方差公式：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2。$$

三、完全立方公式：

1. $(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。
2. $(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

四、立方差(和)公式：

1. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ 。
2. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ 。

五、分式運算：

例如：

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4x}{x^2 - 1}。$$

六、根式運算：

設 $a > 0, b > 0$ ，則

$$(1) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}。$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a|。$$

$$(3) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}。$$

$$(4) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b。$$

七、雙重根式的化簡：

設 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則

$$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} \pm \sqrt{b}|。$$

老師說

利用 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，計算 99^2 。

解

1

學生做

利用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，計算 101^2 。

解

老師說

利用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，展開 $(x+2y)^2(x-2y)^2$ 。

解

2

學生做

展開 $(2x-y)^2(y+2x)^2$ 。

解

延伸練習

展開 $(a-b+5)(a+b-5)$ 。**答：**_____。

老師說

展開 $(2x+y)^3$ 。

解

3

展開 $(2x+3)^3$ 。

解

學生做

延伸練習

展開 $(x-2y^2)^3$ 。**答**：_____。

老師說

利用 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ ，

展開 $(x+3)(x^2-3x+9)$ 。

解

4

展開 $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ 。

解

學生做

延伸練習

計算 101^3-1 。**答**：_____。

老師說

化簡 $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}$ 。

解

5

化簡 $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}$ 。

解

學生做

延伸練習

設 $x+y=4$ ， $xy=1$ ，求 $\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y+1}$ 的值。**答**：_____。

老師說

化簡 $\frac{\sqrt{54}}{3} + \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{8}{\sqrt{24}}$ 。

解

6

化簡 $5\sqrt{18} - 7\sqrt{8} + 4\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$ 。

解

學生做

延伸練習

化簡 $(1-\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ 。**答**：_____。

老師說

設 $a > 0, b > 0$ ，利用 $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ，化簡 $\sqrt{13+4\sqrt{10}}$ 。

解

7

學生做

化簡 $\sqrt{21-2\sqrt{38}}$ 。

解

延伸練習

設 $a = \sqrt{8} + \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ，試比較 a, b 之大小。答：_____。

老師說 *

設 a, b 為實數，且 $a-b=5$ ， $ab=-3$ ，求 a^3-b^3 之值。

解

8

學生做 *

設 a, b 為實數，且 $a+b=8$ ， $ab=3$ ，求 a^2+b^2 之值。

解

延伸練習

設 $a = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ，求 a^3+b^3 之值。答：_____。

老師說 *

化簡 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6}$ 。

解

9

學生做 *

化簡 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9}$ 。

解

老師說 *

化簡 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ 。

解

10

學生做 *

化簡雙重根號 $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$ 。

解

延伸練習

若 $\sqrt{55+\sqrt{55}}$ 介於兩正整數 a 及 $a+1$ 之間，則 a 之值為何？(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

答：_____。

先修評量

單元 1

乘法公式、分式與根式運算



得分

每題 10 分，共計 100 分

1. 算式 $(-3)^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^3}$ 之值為何？

- (A) -138 (B) -122 (C) 24 (D) 40

【104.會考】

答：_____。

2. 算式 $\sqrt{6} \times (\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)$ 之值為何？

- (A)
- $\sqrt{2} - \sqrt{6}$
- (B)
- $\sqrt{2} - 1$
- (C)
- $2 - \sqrt{6}$
- (D) 1

【107.會考】

答：_____。

3. 判斷下列各式的值，何者最大？

- (A)
- $25 \times 13^2 - 15^2$
- (B)
- $16 \times 17^2 - 18^2$
- (C)
- $9 \times 21^2 - 13^2$
- (D)
- $4 \times 31^2 - 12^2$
- 【104.會考】

答：_____。

4. 下列哪些是 $x^6 - 2^6$ 的因式？(多選)

- (A)
- $x - 2$
- (B)
- $x + 2$
- (C)
- $x^2 - 4$
- (D)
- $x^2 - 4x + 4$
- (E)
- $x^2 + 2x + 4$

答：_____。

5. 計算 $(2x+1)(x-1) - (x^2+x-2)$ 的結果，與下列哪一個式子相同？

- (A)
- $x^2 - 2x + 1$
- (B)
- $x^2 - 2x - 3$
- (C)
- $x^2 + x - 3$
- (D)
- $x^2 - 3$

【105.會考】

答：_____。

6. 若 a, b 為兩質數且相差 2，則 $ab+1$ 之值可能為下列何者？

- (A)
- 39^2
- (B)
- 40^2
- (C)
- 41^2
- (D)
- 42^2

【106.會考】

答：_____。

7. 求 $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times (1 - \frac{1}{4^2}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{10^2}) =$ _____。8. 已知 a, b 為實數，且 $a+b=5$ ， $a^3+b^3=185$ ，求 $a^2+b^2=$ _____。9. 設 $\sqrt{10+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ 之整數部分為 a ，正小數部分為 b ，則 $b=$ _____。10. 求 $(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}) \times (1+\sqrt{3}-\sqrt{5}) \times (1-\sqrt{3}+\sqrt{5}) \times (-1+\sqrt{3}+\sqrt{5}) =$ _____。