

重點聚焦

一、多項式的基本概念：

1. 多項式的定義：

(1) 若 n 是正整數或 0，如：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

即為 x 的多項式。

例如：

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6, \text{ 其中 } 3x^5 \text{ 為 } 5 \text{ 次項, } -2x^3 \text{ 為 } 3 \text{ 次項, } 6 \text{ 為常數項。}$$

(2) $a_n x^n$ 是 x 次數最高的非零項 ($a_n \neq 0$)， $f(x)$ 是一個 x 的 n 次多項式， n 為 $f(x)$ 的次數，記為 $\deg(f(x)) = n$ 。

例如：

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6 \text{ 為 } 5 \text{ 次多項式, 記為 } \deg(f(x)) = 5。$$

(3) 0 也是一個多項式，稱為零多項式，不定它的次數。(非零多項式才有次數)

(4) 由高次項寫到低次項，稱為**降冪排列**；由低次項寫到高次項，稱為**升冪排列**。

2. 兩多項式相等：

當兩多項式相對應的每一項的係數都相同，則稱這兩個多項式相等。

例如：

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6, g(x) = 6 + 3x^5 - 2x^3, \text{ 則 } f(x) = g(x)。$$

二、多項式的四則運算：

1. 多項式的加減法：

(1) 加法：

$$(3x^5 - 2x^3 + 6) + (x^3 + x + 1) = 3x^5 + (-2+1)x^3 + x + (6+1)。$$

(2) 減法：

$$(3x^5 - 2x^3 + 6) - (x^3 + x + 1) = 3x^5 + (-2-1)x^3 + (0-1)x + (6-1)。$$

2. 多項式的乘法：

(1) 利用乘法對加法的分配律展開運算，或以直式(或直式分離係數法)加以計算。

(2) 若 $\deg(f(x)) = n$, $\deg(g(x)) = m$ ，則 $\deg(f(x)g(x)) = n+m$ 。

注意：零多項式乘上任意次多項式仍為零多項式。故此，零多項式無法定義次數。

3. 多項式的除法：

除法原理：

將多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$

(其中 $g(x) \neq 0$)，會得到唯一的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ ，且 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，其中 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 或是 $r(x) = 0$ 。

老師說

試運算整理多項式 $3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 \cdot x^2 + x$ ，並按降冪排列。

解

1

學生做

$3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 \cdot x^2 + x$ 的三次項係數為何？

解

延伸練習

下列何者為 x 的多項式？

- (A) $x^2 - x + \sqrt{2}$ (B) $x^2 - \sqrt{x} + 1$ (C) $2^x + 2^{-x}$ (D) $x + \frac{1}{x} + 1$ (E) $x^2 + |x| + 3$

答：_____。

老師說

已知 $f(x) = 3 \cdot x^{(3^3)} + 2 \cdot x^{(2^2)} + x$ ，求 $\deg(f(x)) = ?$

解

2

學生做

$f(x) = 3x^3 - 4x^4 + 2x^2 - x$ ，求 $\deg(f(x)) = ?$

解

延伸練習

若 $f(x)$ 為 4 次多項式，則 $f(x^2 + 1)$ 的次數為何？**答**：_____。

老師說

化簡 $(2x+1)(x-1) - (x^2+x-2) = ?$

解

【105. 會考】

3

學生做

化簡 $(3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5) = (3x^6-4x^5) \times p(x)$ ，其中 $p(x) = ?$

【103. 會考】

解

延伸練習

若 $a(x-3)(x-2)(x-1) + b(x-2)(x-1) + c(x-1) + d = 2x^3 - 9x^2 + 9x + 5$ ，則 $a+b+c+d = ?$
答：_____。

老師說

試求 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$ 的三次項係數。

【國中試題】

解

4

學生做

$(2x^{11} + 3x^7 + 2x^6 + 5x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 2)^2$ 展開式中 x^2 項的係數 = ?

解

延伸練習

試求 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$ 展開後各項係數和 = ? **答**：_____。

老師說

計算多項式 $10x^3 + 7x^2 + 15x - 5$ 除以 $5x^2$ 後，所得餘式為何？

【103.會考】

解

5

學生做

計算多項式 $-2x(3x-2)^2 + 3$ 除以 $3x-2$ 後，所得商式與餘式兩者之和為何？

【104.會考】

解

延伸練習

已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式為 $3x^2 - 2x + 1$ ，則 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式 = ?

答：_____。

老師說

設 $x^3 + 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$ 之商式為 $x + 2$ ，餘式為 $2x - 1$ ，則 $f(x) = ?$

解

6

* 學生做

以 $x + 2$ 除多項式 $(x + 1)^3(2x + 1) + 5$ 所得之餘式 = ?

解

延伸練習

設 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 5$ ，若 $f(-3) = 8$ ，則 $f(3) = ?$ **答**：_____。

老師說

$f(x) = ax^7 + bx^5 - 2011x^3 + x^2 - 3$ ，則 $f(6) + f(-6) = ?$

解

7

學生做

已知 $f(x) = (a - b)x^2 + 2x + 2a + b$ 與 $g(x) = 4x^2 + (a + b)x + c$ ，若 $f(x) = g(x)$ ，試求 $a, b, c = ?$

解

延伸練習

有甲、乙兩生同解一個二次項係數為 1 的一元二次方程式，甲不慎將一次項係數看錯，得兩根為 -2 與 -3 ，而乙誤將常數項看錯，得兩根為 1 與 4，已知甲、乙兩生沒有其他錯誤，則此方程式的正確兩根為何？

答：_____。



先修評量

單元 7 多項式(1)

每題 10 分，共計 100 分

1. $f(x)$, $g(x)$ 均為 n 次多項式，且 $h(x) = g(x) - f(x)$ ，則 $h(x)$ 為
 (A) 零多項式 (B) 零次多項式 (C) n 次多項式
 (D) $(n-1)$ 次多項式 (E) 以上均有可能

答：_____。

2. 多項式 $108x + 107x^2 + 106x^3 + \cdots + x^{108}$ (係數成等差)，按規律可得 54 次項係數為何？

答：_____。

3. 已知 $f(2x-1) = 3x+8$ ，則 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若 $f(x) = x^4$ ，則 $f(x^2+1)$ 的次數為何？

答：_____。

5. $(x^2+3x+2)^2$ 除以 x^2+2x+3 所得之餘式 = _____。

6. 已知多項式 ax^3+bx^2+cx+d ，其中 $a+b+c+d = -6$ ，則 ax^3+bx^2+cx+d 除以 $x-1$ 的餘式為 _____。

【國中試題】

7. $x^{2019} + 2019$ 除以 $2019x + 2019$ 的餘式為何？

答：_____。

8. 設 $f(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + c$ 且 $f(11) = f(12) = f(13) = 1$ ，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 以 x^2-x+1 除 $f(x) = x^5-3x^3+bx+a$ 所得之餘式為 $2x+3$ ，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ ，商式 = _____。

10. $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6$ ，求 $f(\frac{3+\sqrt{17}}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。