

圓方程式

重點聚焦

一、圓的定義：

平面上到一定點等距離的所有點所形成的圖形稱為圓。(所謂的“圓”指的是“圓周”上所有點所形成的幾何圖形)

二、圓的標準式：

若圓心為 $A(h, k)$ ，
半徑為 r 的圓上的任
何一點 P ， $\overline{AP} = r$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

即圓的標準式。

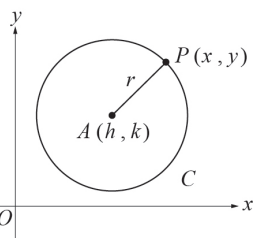
三、圓的一般式：

將圓的標準式 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 展開可得 $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ ，意即圓的方程式必可寫成 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的型式，稱為圓的一般式。

四、 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 圖形：

將 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 分別對 x, y 配方，

$$\text{得 } \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}.$$



因此，可歸納出下列三種情形：

(1) 圓：當 $d^2 + e^2 - 4f > 0$ 時，

$$\text{則表圓心為 } \left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right),$$

$$\text{半徑為 } \frac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}}{2} \text{ 的圓。}$$

(2) 點圓：當 $d^2 + e^2 - 4f = 0$ 時，

$$\text{則圖形為一點 } \left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)。$$

(3) 虛圓：當 $d^2 + e^2 - 4f < 0$ 時，則沒有圖形。

五、點與圓的位置關係：

給定一個點 $P(x_0, y_0)$ 以及圓 C ：

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0. \quad (\text{其中 } d^2 + e^2 - 4f > 0)$$

(1) 若 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f < 0$ ，則 P 點在圓內。

(2) 若 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$ ，則 P 點在圓上。

(3) 若 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f > 0$ ，則 P 點在圓外。

老師說

圓心在 $A(4, 3)$ 且通過原點 O 的圓的方程式為何？

解

1

學生做

已知 $A(5, 3), B(-1, 2)$ ，以 A, B 為直徑兩端點的圓方程式為何？

解

延伸練習

已知 $A(2, -3), B(-4, 3), C$ 為 $\triangle ABC$ 的三頂點且 $\angle C = 90^\circ$ ，請問在坐標平面上，所有 C 點所圍成的圓面積為何？**答**：_____。

老師說

求圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ 的圓心及半徑。

解

2

學生做

設圓 $C: 3x^2 + 3y^2 - 6x + 18y - 18 = 0$ 的圓心 (a, b) ，半徑 r ，求序組 $(a, b, r) = ?$

解

延伸練習

求圓 $3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$ 的半徑 = ? **答** : _____。

老師說

x, y 為實數且 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ ，則 $(x-5)^2 + (y-2)^2$ 的最小值為何？

解

3

學生做

若 x, y 為實數，且 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ ，則 $x^2 + y^2 + 4x - 4y$ 之最大值為何？

解

延伸練習

$x^2 + y^2 = 12x + 6y + 4$ 和 $x^2 + y^2 = 12y + k + 4x$ 的圖形，在 $a \leq k \leq b$ 時有交點，則 $a - b = ?$

答 : _____。

老師說

試判斷下列方程式的圖形：

(1) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$ 。

(2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ 。

(3) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 14 = 0$ 。

解

4

學生做

試判斷下列方程式的圖形：

(1) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ 。

(2) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$ 。

(3) $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 52 = 0$ 。

解

老師說

設 $C: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 為坐標平面上的圓，試回答下列問題：

- (1) $A(3, 6)$ 與圓 C 的切線段長 = ?
- (2) 若點 $(2, a)$ 在圓 C 內部，求實數 a 的範圍。

解

5

學生做

若點 $(1, -1)$ 及 $(2, 3)$ 分別在圓 $x^2 + y^2 = k$ 的內、外部，則 k 之範圍為何？

解

老師說

設圓心在直線 $y = 2x$ 上，且圓通過 $A(1, 0)$ ， $B(3, 2)$ ，求圓心至弦 $\overline{AB}$ 的距離。

解

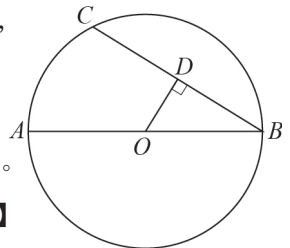
6

學生做

如圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑， C 為圓 O 上一點， $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求 $\triangle OBD$ 面積。

解

【104. 會考】



延伸練習

一圓通過兩點 $(4, -3)$ ， $(-10, 3)$ 且其圓心在直線 $2x - y = 0$ 上，如果令此圓的方程式為 $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + c = 0$ ，則：

- (A) a 為 2 的倍數 (B) a 為 3 的倍數 (C) b 為 5 的倍數
 (D) c 為 7 的倍數 (E) c 為 9 的倍數

答： _____。

老師說

求圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 對稱於直線 $L: x - y + 3 = 0$ 的圓方程式。

解

7

學生做

求平行直線 $x + y = 5$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ 相切的直線方程式為何？(兩解)

解

延伸練習

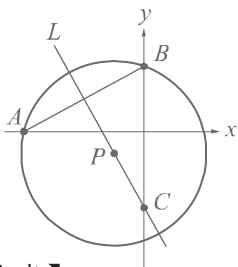
圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ ，下列哪一點向圓所做的兩條切線互相垂直？

- (A) $(2, 0)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(-1, -1)$ (D) $(1, \sqrt{3})$ (E) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

答：_____。

老師說 *

如圖， A, B 兩點分別為圓 P 與 x 軸、 y 軸的交點，直線 L 過 P 點與 $\overline{AB}$ 垂直， C 為 L 與 y 軸的交點。若 A, B, C 的坐標分別為 $(a, 0), (0, 4), (0, -5)$ ，其中 $a < 0$ ，則 $a = ?$ 【107.會考】

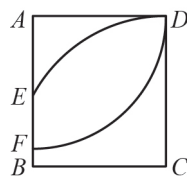


解

8

* 學生做

如圖，在矩形 $ABCD$ 中，以 $\overline{AD}$ 為半徑， A 為圓心畫一弧交 $\overline{AB}$ 於 F 點；以 $\overline{CD}$ 為半徑， C 為圓心畫一弧交 $\overline{AB}$ 於 E 點。若 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{CD} = \frac{17}{3}$ ，求 $\overline{EF} = ?$ 【105.會考】



解

延伸練習

已知 $A(-3, 0), B(7, 0)$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑畫一半圓與正 y 軸交於 D 點， D 點坐標為何？

答：_____。

【國中試題】

先修評量

單元 6 圓方程式



每題 10 分，共計 100 分

1. 求圓心為 $(1, 1)$ 的單位圓 (半徑長為 1) 方程式為_____。
2. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ ，其圓心=_____，半徑長=_____。
3. 有一圓 C' 通過 $A(1, 1)$ ，且與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 有相同的圓心 (a, b) ，則：

(A) 圓心為 $(1, 2)$ (B) 圓 C' 半徑為 $\sqrt{5}$ (C) 圓 C' 方程式為 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
 (D) $a+b=3$ (E) 圓 C' 面積為 5π

答：_____。

4. 設圓 $C: 2x^2 + ay^2 - 2bx + 8y + 18 = 0$ 之圓心為 $(h, -2)$ ，並過點 $P(3, 0)$ ，則圓心=_____，半徑長=_____。

5. $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2}$ 的圖形為一圓，求此圓的標準式。

答：_____。

6. 方程式 $ax^2 + bxy - y^2 + 4x - 6ky = 0$ 的圖形若為一圓，下列何者正確？(多選)

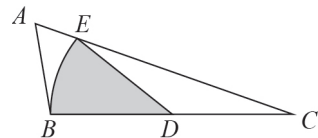
- (A) $a=1$ (B) $b=0$ (C) 圓心為 $(2, -3k)$
 (D) k 的範圍為 $k > -\frac{4}{9}$ (E) 最小圓面積為 4π

答：_____。

7. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{BC}$ 的中點，以 D 為圓心， $\overline{BD}$ 長為半徑畫一弧交 $\overline{AC}$ 於 E 點。若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 100^\circ$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則扇形 BDE 的面積為何？

- (A) $\frac{1}{3}\pi$ (B) $\frac{2}{3}\pi$ (C) $\frac{4}{9}\pi$ (D) $\frac{5}{9}\pi$

答：_____。



【107.會考】

8. 在 xy 平面上，所有滿足 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ 條件的點 $P(x, y)$ 所形成的區域面積=_____。

9. 圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ ，已知某點向圓所做的兩條切線互相垂直，求出所有符合此條件的點所形成的圖形。

答：_____。

10. 方程式 $x^2 + y^2 + 2(m+1)x - 2my + 3m^2 - 7 = 0$ ，則下列敘述哪些正確？(多選)

- (A) $m = \sqrt{3}$ 時，圖形為一圓 (B) 圓面積最大為 9π
 (C) $m = -4$ 時，圖形為一點 (D) $m = \frac{3}{4}$ 時，無圖形

- (E) $m = \frac{7}{2}$ 時，圖形和 y 軸相切

答：_____。