

直線方程式

重點聚焦

一、直線的斜率：

設直線 L 不是鉛垂線，且 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

為 L 上相異兩點，則 L 的斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

($x_1 - x_2 \neq 0$)。

(當直線 L 是鉛垂線時， $x_1 = x_2$ ，此時分母為 0，所以鉛垂線的斜率不存在。)

說明：

傾斜程度(坡度) = $\frac{\text{鉛垂位移}}{\text{水平位移}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

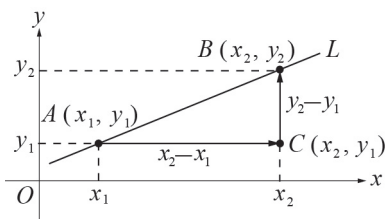
例如：

$$50\% (\text{坡度}) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} (\text{斜率})。$$

(底角約 26.6 度)

$$100\% (\text{坡度}) = \frac{100}{100} = 1 (\text{斜率})。$$

(底角 45 度)



二、直線的方程式：

(1) 點斜式：

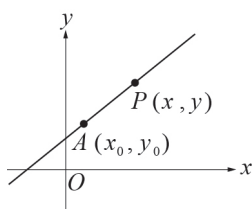
過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為

$$y - y_0 = m(x - x_0)。$$

說明：

設點 (x, y) 為所求直線上 $A(x_0, y_0)$ 以外的

點，符合 $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)。$



(2) 斜截式：

y 截距為 b (過點 $(0, b)$) 且斜率為 m 的直線方程式為

$$y = mx + b。$$

(3) 截距式：

x 截距為 a ， y 截距為 b ，且 $ab \neq 0$ 的直線方程式為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1。$$

注意：

x 截距為 0 且 y 截距為 0 的直線方程式為 $y = mx$ 。(其中 m 為直線的斜率)

(4) 一般式：

$ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$) 的斜率為 $-\frac{a}{b}$ 。

三、斜率的直觀特性：

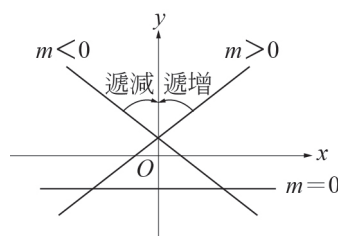
(1) 水平線的斜率為 0。

(2) 直線由左下往右上傾斜時，斜率為正。

(3) 直線由左上往右下傾斜時，斜率為負。

(4) 直線愈接近鉛垂線，其斜率的絕對值也愈大。

(5) 斜率的絕對值 = 坡度。



老師說

$(-3, 1)$ 為下列哪一條直線上的點？

$$L_1: x+2y=-1, L_2: x-2y=1,$$

$$L_3: 2x+3y=6, L_4: 2x+3y=-6 \quad \text{【105.會考】}$$

解

1

學生做

二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 7x-3y=8 \\ 3x-y=8 \end{cases}$ 的解為

$$(x, y) = (a, b), \text{ 則 } a+b = ? \quad \text{【107.會考】}$$

解

延伸練習

對任意實數 m ，直線 $L: y=mx+(3m+2)$ 恆通過哪一定點？

- (A) $(3, 2)$ (B) $(-3, 2)$ (C) $(3, -2)$ (D) $(-2, -3)$ (E) $(2, 3)$

答：_____。

老師說

直線 $L: 5x+ky+2=0$ 通過 $A(a+3, 4)$ ，

$B(a, -1)$ 兩點，則 $k = ?$ 【國中試題】

解

2

學生做

求直線 $L: 2x-y=-2$ 對稱於 y 軸的直線方程式。

【國中試題】

解

延伸練習

不論任何實數 k ，直線 $(3k+5)x+(k-2)y+4k+1=0$ 恆過的定點為何？**答**：_____。

老師說

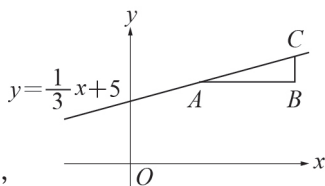
如圖，直線 L 的方程

式為 $y = \frac{1}{3}x + 5$ 。若

A, C 均在 L 上，且

$\overline{AB} \parallel x$ 軸， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，
 $\overline{AB} = 6$ ，求 L 的斜率與 $\overline{BC} = ?$

解

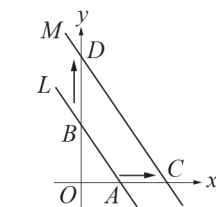


3

學生做

如圖，直線 $L: 3x+2y=30$ 與直線 M 平行，與兩軸交點於 A, B ，當 A 右移 12 個單位至 C ， B 同時上移至 D ， C, D 皆落於直線 M 上，求直線 M 的斜率與 $D = ?$

解



【國中試題】

延伸練習

設 $f(x)$ 為一次函數，而且每當 x 增加 1 單位時，其相對應的函數值增加 3 單位， $f(-4)=0$ ，則：

- (A) $y=f(x)$ 的圖形之斜率為 3 (B) $y=f(x)$ 的圖形為一由左上向右下傾斜之直線 (多選)
(C) $y=f(x)$ 的圖形不通過第二象限 (D) $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸交於點 $(0, 12)$
(E) $f(-3)=3$

答：_____。

 老師說

直線 L 方程式為 $x-3y+15=0$ ， L 的斜率 = ?

解

4

 學生做

直線 L 方程式為 $y=\frac{-3}{2}x+15$ ， L 的斜率 = ?

解

 延伸練習

設 $f(x)=\frac{5}{3}x-2^{10}$ ，求 $\frac{f(1911)-f(2019)}{108}=?$ **答**：_____。

 老師說

斜率為 m 的直線 $L:(y-2)=m(x+3)$ 必定過哪一個定點？

解

5

 學生做

求過 $(-3, 1)$ 且斜率為 $-\frac{1}{2}$ 的直線方程式。

解

 老師說

直線 L 方程式為 $\frac{x}{-15}+\frac{y}{5}=1$ ， L 的斜率 = ?

解

6

 學生做

直線 L 方程式為 $\frac{x}{10}+\frac{y}{15}=1$ ， L 的斜率 = ?

解

 延伸練習

在坐標平面上，已知 O 為原點， $A(0, 4)$ ， $B(-3, 0)$ ， $C(4, 0)$ 三點，直線 L 過 C 點且與 y 軸交於 D 點。若 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ ，則 L 可能為下列哪條直線？(多選)

- (A) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ (B) $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ (C) $\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=1$ (D) $-\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=1$ (E) $-\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=-1$

答：_____。

老師說

如右圖，三直線

$$L_1: y = ax + b,$$

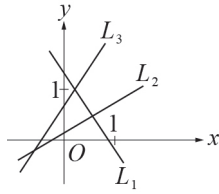
$$L_2: \frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1,$$

$$L_3: ex + fy = 1,$$

請選出正確的選項

(A) $ab > 0$ (B) $cd > 0$ (C) $c > d$

(D) $bf > 1$ (E) $ad > 1$

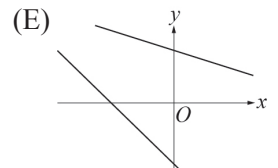
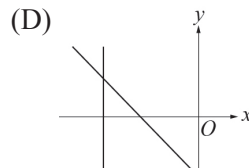
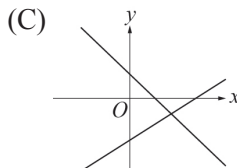
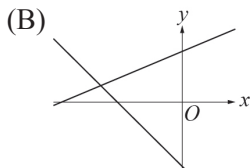
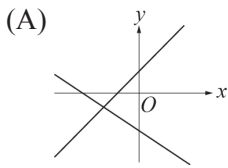
解


7

學生做

 求直線 $L: -x + \frac{y}{2} = 1$ 對稱於 y 軸的直線方程式。

解
延伸練習

 將直線方程式 $y = ax + b$ 與 $y = bx + a$ 畫在同一個坐標平面上，下列何者可能為所得圖形？

答： _____。

【國中試題】

老師說

下列五條直線中，哪一條直線斜率最大？

(A) $L_1: 2x + 5y = 7$ (B) $L_2: y - 2 = 0$

(C) $L_3: 3x - 6y + 5 = 0$ (D) $L_4: 3x - y = 13$

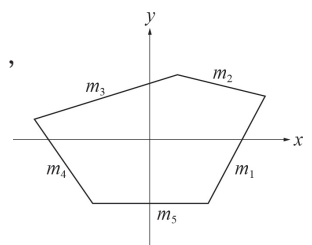
(E) $L_5: x + 3y = 2$

解

8

學生做

 如圖，五條直線的斜率分別為 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ，比較其大小？

解

延伸練習

 直線 $2x - 3y = 12$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積為何？

答： _____。

先修評量

單元 5 直線方程式



每題 10 分，共計 100 分

1. 已知坐標平面上函數 $y=3x+a$ 圖形通過點 $(0, -4)$ ，其中 a 為一數，求 a 的值為何？

(A) -12 (B) -4 (C) 4 (D) 12

答：_____。【107.會考】

2. 若聯立方程式 $\begin{cases} 5x-y=5 \\ y=\frac{1}{5}x \end{cases}$ 的解為 $x=a, y=b$ ，則 $a+b$ 之值為何？

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{75}{13}$ (C) $\frac{31}{25}$ (D) $\frac{29}{25}$

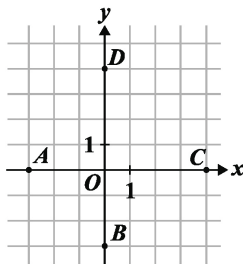
答：_____。【103.會考】

3. 右圖的坐標平面上有原點 O 與 A, B, C, D 四點。若有一直線 L 通過點 $(-3, 4)$ 且與 y 軸垂直，則 L 也會通過下列哪一點？

(A) A (B) B (C) C (D) D

【108.會考】

答：_____。

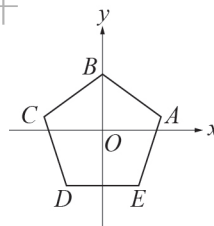


4. 如圖， $ABCDE$ 是坐標平面上一個正五邊形，下列各直線中，斜率為正的有

(A) 直線 AB (B) 直線 BC (C) 直線 CD

(D) 直線 DE (E) 直線 EA

答：_____。



5. 求直線 $10^2x + 2^{10}y + 12^{12} = 0$ 的斜率 = _____。

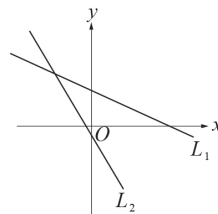
6. 求直線 $L_k: 5x - 2y + 1 + k \cdot (2x + y + 4) = 0$ ($k \in R$) 恆過的定點為何？

答：_____。

7. 如圖，兩直線 L_1, L_2 之方程式分別為 $L_1: x + ay + b = 0$, $L_2: x + cy + d = 0$ ，則：(多選)

(A) $a < 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $c < d$

答：_____。



8. 設一次函數 $f(x) = ax + b$ 滿足 $f(2) = 0, f(4) = 4$ ，當 $-2 \leq x \leq 5$ 時，下列選項何者正確？

(A) $a = -4$ (B) 最大值為 8 (C) 最小值為 -6 (D) $f(1) = 2$ (E) $f(3) = 2$

答：_____。

9. 設 $f(x) = \frac{9}{7}x + 20^{19}$ ，求 $\frac{f(2019) - f(2001)}{81} =$ _____。

10. 在公園有兩座垂直於水平地面且高度不一的圓柱，兩座圓柱後面有一堵與地面互相垂直的牆，且圓柱與牆的距離皆為 120 公分。敏敏觀察到高度 90 公分矮圓柱的影子落在地面上，其影長為 60 公分；而高圓柱的部分影子落在牆上，如圖所示。

已知落在地面上的影子皆與牆面互相垂直，並視太陽光為平行光，在不計圓柱厚度與影子寬度的情況下，請回答下列問題：

(1) 若敏敏的身高為 150 公分，且此刻她的影子完全落在地面上，則影長為多少公分？

(2) 若同一時間量得高圓柱落在牆上的影長為 150 公分，則高圓柱的高度為多少公分？請詳細解釋或完整寫出你的解題過程，並求出答案。

答：_____。

