第一單元：牛頓一次因式檢驗法

相信同學們在課本中都已經學習到如何解出『已分解的高次多項式不等式』，那麼緊接而來的下一個問題就是：如何將高次多項式分解開來呢？

舉例來說

請分解 (1) $3x^3-5x^2-4x+4$ (2) $2x^3+x^2+\cancel{2}x-3$

誤植，請更正為：
$2x^3+x^2+5x-3$

在國中學過的**<u>提公因式法</u>**以及**<u>十字交乘法</u>**似乎也無法幫助我們分解上述兩個題目，所以我們只能大海撈針，一個一個計算$(x\pm1)$、$(x\pm2)$、$(2x+1)$、$(2x\pm3)$、....等一次式是否可以整除目標多項式，可是這樣也太沒有效率了，因此我們先從多項式的乘法來觀察一下：

$$(x-3)(2x-1)(3x+1)=6x^3-19x^2+2x+3$$

不難發現，展開後的首項係數以及常數項，都可從左邊的分解式中看出端倪。
再觀察另一個例子：

若 $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一個係數都是整數的整係數 n 次多項式

令 $f(x)=(px-q)\times g(x)$，在 $p\neq0$ 的情況之下，$f(x)$ 是一個整係數 $n+1$ 次多項式，而且首項係數為 pa_n，會被 p 整除；常數項為 qa_0，會被 q 整除

回到剛剛所舉的例子：

$$(x-3)(2x-1)(3x+1)=6x^3-19x^2+2x+3$$

在不知道分解式的情況下去分解 $6x^3-19x^2+2x+3$，我們不必再大海撈針的去一個一個測試$(x\pm1)$、$(x\pm2)$、$(2x+1)$、$(2x\pm3)$、...等一次式，因為顯然其中有些一次式是不可能整除原多項式，例如$(x\pm2)$就不合，因為 ±2 不能整除 3。

所以我們針對首項係數 6 以及常數項 -5，將他們的因數分別列出來組合成一次式，可以列出可能的一次因式：

一次項	$\pm x$、$\pm2x$、$\pm3x$、$\pm6x$
常數項	±1、±3

這樣總共可以搭配出 32 種可能的一次因式，但是從中可以發現$(x+1)$與$(-x-1)$的整除性質是

相同的，因此統一取一次項係數為正，所以這樣就只剩下 16 種可能的一次因式：

一次項	x、$2x$、$3x$、$6x$
常數項	±1、±3

再來我們又發現 $(x\pm1)$ 與 $(3x\pm3)$ 的整除性質是相同的，爾後只要檢查一次項係數與常數項互質的一次式即可，所以只要檢查：$(x\pm1)$、$(x\pm3)$、$(2x\pm1)$、$(2x\pm3)$、$(3x\pm1)$、$(6x\pm1)$ 等 12 個一次因式即可。

使用因式定理發現，當 $x=3$ 的時候 $6x^3-19x^2+2x+3=0$，找到 $(x-3)$ 是其一次因式

利用除法將一次因式提出：$6x^3-19x^2+2x+3=(x-3)(6x^2-x-1)$

再利用十字交乘法就可以完整分解 $6x^3-19x^2+2x+3=(x-3)(2x-1)(3x+1)$ 了！

重新梳理一下剛剛得到的結論：

> 牛頓一次因式檢驗法：
>
> 一個整係數 n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ **若有**一次因式
>
> $(px-q)$，其中 p 與 q 互質，**則** p 為 a_n 的因數，且 q 為 a_0 的因數

要注意的是，以上的結論若反過來說是不成立的！

> 牛頓定理的逆敘述**是不成立的**：
>
> 有一個整係數 n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，我們找到兩個互質
>
> 的整數 p 與 q，且 p 為 a_n 的因數，q 為 a_0 的因數，但 $(px-q)$ **不一定是** $f(x)$ 的因

現在讓我們來解原本給的題目

請分解 (1) $3x^3-5x^2-4x+4$	(2) $2x^3+x^2+\cancel{2}x-3$

誤植，請更正為：
$2x^3+x^2+5x-3$

【參考解法】

(1) 令 $f(x)=3x^3-5x^2-4x+4$

由牛頓一次因式檢驗法，我們列出可能的一次因式有：
$(x\pm1)$、$(x\pm2)$、$(x\pm4)$、$(3x\pm1)$、$(3x\pm2)$、$(3x\pm4)$
經過計算發現 $f(1)=-2$， $f(-1)=0$，因此由因式定理得知 $(x+1)$ 為一次因式

使用綜合除法將 $f(x)$ 除開得到 $f(x)=(x+1)(3x^2-8x+4)=(x+1)(x-2)(3x-2)$

誤植，請更正為：
$2x^3+x^2+5x-3$

(2) 令 $g(x)=2x^3+x^2+\cancel{2}x-3$

由牛頓一次因式檢驗法，我們列出可能的一次因式有：
$(x\pm1)$、$(x\pm3)$、$(2x\pm1)$、$(2x\pm3)$

依序計算發現 $g(\frac{1}{2})=0$，故由因式定理知 $(2x-1)$ 為一次因式

故利用綜合除法將 $g(x)$ 除開得到 $g(x)=(2x-1)(x^2+x+3)$

在實際計算題目的時候，我們可以多加入高斯引理來協助我們更快的排除不可能的一次因式

高斯引理
兩個本原多項式的乘積仍然是一個本原多項式。
本原多項式(*Primitive Polynomial*)：係數的最大公因數為 1 的整係數多項式

透過高斯引理，我們可以得到以下的結論(其中的推論與證明過程就留給同學自己思考了)：

若 $f(x)$ 是一個本原多項式，且有一次本原多項式因式 $g(x)=(px-q)$，則對於任意整數 k， $f(k)$ 必然會是 $g(k)$ 的倍數。

我們利用這個引理解一個例題給大家看：

請分解 $6x^3-23x^2-38x+15$

【參考解法】

令 $f(x)=6x^3-23x^2-38x+15$
由牛頓一次因式檢驗法列出可能的一次本原因式：

$(x\pm1)$、$(x\pm3)$、$(x\pm5)$、$(x\pm15)$、$(2x\pm1)$、$(2x\pm3)$、$(2x\pm5)$、$(2x\pm15)$、$(3x\pm1)$、$(3x\pm5)$、$(6x\pm1)$、$(6x\pm5)$

由 $f(1)=-40$，可以**排除** $(x-1)$、$(x+5)$、$(x\pm15)$、$(2x+1)$、$(2x\pm5)$、$(2x\pm15)$、$(6x+1)$、$(6x+5)$ 都不是 $f(x)$ 的因式。

※說明：由於 $f(x)$ 是本原多項式，若本原因式為 $g(x)$，則當 $x=1$ 時，$f(1)$ 應為 $g(1)$ 的倍數，所以舉例來說 $f(1)=-40$，而當 $x=1$ 時，$(x+5)=6$，顯然 -40 不是 6 的倍數，所以 $(x+5)$ 不是 $f(x)$ 的因式

所以目前剩下可能的一次本原因式還有：
$(x+1)$、$(x\pm3)$、$(x-5)$、$(2x-1)$、$(2x\pm3)$、$(3x\pm1)$、$(3x\pm5)$、$(6x-1)$、$(6x-5)$

再由 $f(-1)=24$，可以**排除** $(x+1)$、$(2x-3)$、$(6x-1)$、$(6x-5)$ 都不是 $f(x)$ 的因式。
故目前剩下可能的一次本原因式還有：
$(x\pm3)$、$(x-5)$、$(2x-1)$、$(2x+3)$、$(3x\pm1)$、$(3x\pm5)$

接著再計算 $f(3)=-144$，可以**排除** $(x-3)$、$(2x-1)$、$(3x+1)$、$(3x+5)$
以及利用 $f(-3)=-240$，可以再**排除** $(x+3)$、$(3x-5)$
所以剩下可能的一次因式還有：$(x-5)$、$(2x+3)$、$(3x-1)$

然後發現 $f(5)=0$，也就是 $(x-5)$ 是 $f(x)$ 的因式，利用除法將 $f(x)$ 分解開來，得到
$f(x)=6x^3-23x^2-38x+15=(x-5)(6x^2+7x-3)=(x-5)(2x+3)(3x-1)$

第二單元：韋達定理(根與係數關係)：

在前面我們已經提到牛頓一次因式檢驗法，這個檢驗法告訴我們關於因式(也就是根)與首項係數、常數項存在著某種關係，那有沒有更詳進的關於根與係數之間的關係呢？

早在牛頓出生以前，一位法國數學家弗朗索瓦·韋達（François Viète）就有做過相關的研究，就讓我們一起來看看韋達定理的內容吧！

韋達定理(二次方程式)：

若一個二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根分別是 x_1 與 x_2，則 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，且 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

說明：

因為 x_1 與 x_2 是方程式的兩個根，所以二次式 ax^2+bx+c 有兩個因式分別是 $(x-x_1)$ 與 $(x-x_2)$，

也就是說：

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a(x-x_1)(x-x_2)\\
&=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)\\
&=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2
\end{aligned}
$$

比較一下係數就可以發現：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\text{，且 }x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

若是三次方程式的話會怎麼樣呢？

韋達定理(三次方程式)：

若一個三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三個根分別是 x_1、x_2 與 x_3，

則 $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$、$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=\dfrac{c}{a}$，且 $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{d}{a}$

說明：就如同剛剛的說明一樣

因為 x_1、x_2 與 x_3 是方程式的三個根，所以三次式 ax^3+bx^2+cx+d 有三個因式分別是 $(x-x_1)$、$(x-x_2)$ 與 $(x-x_3)$，也就是說：

$$
\begin{aligned}
ax^3+bx^2+cx+d &= a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\
&= a(x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x+x_1x_2x_3) \\
&= ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x+ax_1x_2x_3
\end{aligned}
$$

比較一下係數就可以發現：

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \text{、} x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=\frac{c}{a} \text{，且 } x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}$$

現在來看看完整版的韋達定理：

韋達定理：

若 n 次方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_n=0$ 的 n 個根分別是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，則：

根的總和$(x_1+x_2+\cdots+x_n)=-\dfrac{a_1}{a_0}$

任 2 個根的乘積和$(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)=\dfrac{a_2}{a_0}$

任 3 個根的乘積和$(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)=-\dfrac{a_3}{a_0}$

依此類推，任 k 個根的乘積和$=(-1)^k\dfrac{a_k}{a_0}$

例題 1：

已知 $2x^2-6x+1=0$ 的兩根分別是 α 與 β，試問以 $\dfrac{1}{\alpha}$ 、 $\dfrac{1}{\beta}$ 為兩根的二次方程式為何？

【參考解法】

已知 $\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{2}=3$，且 $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$，且 $\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=2$

故以 $\dfrac{1}{\alpha}$ 、 $\dfrac{1}{\beta}$ 為兩根的二次方程式為 $x^2-(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})x+\dfrac{1}{\alpha\beta}=0$，即 $x^2-6x+2=0$

例題2：

已知有三個實數 $a>b>c$，且滿足 $a+b+c=\frac{17}{6}$ ，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{6}$ ，且 $abc=-1$，試問 a、b、c 分別是多少？

【參考解法】

$\because\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\times(abc)=bc+ac+ab=-\frac{5}{6}$

故以 a、b、c 為三根的三次方程式為 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

即 $x^3-\frac{17}{6}x^2-\frac{5}{6}x+1=0\Rightarrow 6x^3-17x^2-5x+6=0$

令 $f(x)=6x^3-17x^2-5x+6$，由牛頓一次因式檢驗法列出可能的一次因式有：
$(x\pm1)$、$(x\pm2)$、$(x\pm3)$、$(x\pm6)$、$(2x\pm1)$、$(2x\pm3)$、$(3x\pm1)$、$(3x\pm2)$、$(6x\pm1)$
檢查 $f(1)=-10$ ，排除 $(x-1)$、$(x+2)$、$(x+3)$、$(x+6)$、$(2x+1)$、$(3x+1)$、$(6x+1)$
檢查 $f(-1)=-12$ ，排除 $(x+1)$、$(x-6)$、$(2x-3)$、$(3x-2)$、$(6x-1)$
檢查 $f(2)=-24$，排除 $(x-2)$、$(2x+3)$、$(3x-1)$
檢查 $f(3)=0$ ，找到一次因式 $(x-3)$ ，由除法得 $f(x)=(x-3)(6x^2+x-2)=(x-3)(2x-1)(3x+2)$
故 $a=3$、$b=\frac{1}{2}$、$c=-\frac{2}{3}$

第三單元：敘述、命題與邏輯推論

敘述

開放語句：用來描述某一或某些事物的狀態或性質關係，稱之為開放語句。
舉例來說：「a 為一個實數」、「$x+y=10$」、「數學老師的數學很好」...等都是開放語句。

開放語句並不是敘述！在數學上的**『敘述』**是一個可以判斷是非的句子。
舉例來說：
「8 比 3 小」是一個敘述，但敘述是錯的；「內角相等的三角形是一個正三角形」也是一個敘述，而且這個敘述是正確的。我們通常會用小寫的英文字母 p、q...來表示敘述

複合敘述：

兩個敘述之間可以用「或」($\vee$)或是「且」($\wedge$)來連接，連接之後變成一個新的敘述，稱為複合敘述。

舉例來說：
「8 小於 3 或 4 大於 2」是一個敘述，它是由「8 小於 3」與「4 大於 2」以『或』連接，那麼「8 小於 3 或 4 大於 2」這個敘述的是非怎麼判斷呢？只要是用『或』連接的敘述中任何一個敘述是對的，那麼整體的敘述就是對的。所以「8 小於 3 或 4 大於 2」這個敘述是正確的。

如果兩個敘述使用『且』連接，那麼其中每一個敘述都必須是正確的，那麼整體的敘述才會是正確的，所以「8 小於 3 且 4 大於 2」這個敘述就是錯誤的。

以下我們用真值表條列出來

敘述 p	敘述 q	敘述 $p\vee q$	敘述 $p\wedge q$
T	T	T	T
T	**F**	T	**F**
F	T	T	**F**
F	**F**	**F**	**F**

在這裡要特別強調，數學上使用的『或』與生活中常用的『或』不太一樣，舉例來說：
當一位服務生對你說：『您的套餐可以免費送一份湯或沙拉』，如果是在數學上，那就代表你可以選擇「一份湯」、「一份沙拉」、或是「一份湯與一份沙拉」；但是對服務員來說，他只希望你在「湯」與「沙拉」之間二選一。同學不妨下次在外用餐的時候注意服務員或是菜單上是怎麼描述的。

否定敘述

否定敘述是原敘述的反面，而將一個敘述否定兩次會變回原本的敘述。要注意，因為敘述可以判斷是非，所以原敘述與其否定敘述其中一定是一個對一個錯，而且原敘述與其否定敘述必須包含所有的狀況。舉例來說敘述「8 比 3 小」的否定敘述是「8 **不**比 3 小」，而**不是**「8 比 3 大」，因為兩個數字比大小的時候有「>」、「=」、以及「<」三種狀況(三一律)。再舉個例子來看，敘述「所有的人都會死」的否定敘述是「存在一個人不會死」而**不是**「所有人都不會死」。敘述「教室內至少有 10 位學生」的否定敘述是「教室內至多有 9 位學生」。

整理一下上述的例子：

原敘述	否定敘述
大於	不大於 (小於或等於)
所有的	存在一個
至少 n 個	至多 $n-1$ 個
至多 n 個	至少 $n+1$ 個

符號的使用上，若原敘述是以 p 表示，那麼其否定敘述會以 $\sim p$ 或是 $\neg p$ 表示。符號 $\forall$ 表示「所有的」，符號 $\exists$ 表示「存在」，而符號 $\exists!$ 表示「存在唯一」。

在此老師分享一個實際發生的案例：
在老師還是一位熱血大學生的時候響應捐血活動上了捐血車，捐血車上的護理師為了避免遇到愛滋病等血液傳染病的捐血者，必須照規定詢問一些比較私人的問題。

護理師：「請問您有固定的性伴侶嗎？」

在那個時候還是母胎單身的我當然是毅然決然的大聲回答：「沒有！」
當然這股堅毅的氣勢，使得護理師十分的訝異，臉上寫滿了「這個大學生怎麼可以這麼理直氣壯的回答出沒有固定的性伴侶這樣的答案，現在的大學生都這麼開放嗎？」

發覺護理師臉上詫異的我，趕緊補上一句：「我沒有性伴侶。」
這才緩解了我們兩人之間的尷尬，當然我也順利的捐了血。
而自此之後，護理師的問題就改成了：「請問您是否有發生危險性行為？」

從這個案例中，希望同學可以了解到，在設定問題的時候必須問到的核心，不要留有其他的可能性，導致得到的答案是錯誤的。

笛摩根定律

要怎麼否定一個有使用「或」或「且」的敘述呢？舉例來看：「$x>3$ 或 $x<1$」的否定敘述是是什麼呢？由於「$x>3$ 或 $x<1$」是以或來做連接，所以只要「$x>3$」或是「$x<1$」其中一

個對了，整個敘述就是對的，所以要將其否定，就必須讓「$x>3$」錯誤以及「$x<1$」錯誤，也就是「$x\le 3$且$x\ge 1$」或是說「$1\le x\le 3$」。

相反的，「$x\le 3$且$x\ge 1$」的否定，因為是用「且」做連接，所以只要讓「$x\le 3$」或是「$x\ge 1$」其中一個錯誤，就會讓整個敘述錯誤，所以「$x\le 3$且$x\ge 1$」的否定敘述即為「$x>3$ 或 $x<1$」

笛摩根定律
$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)$
$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)$
※若兩敘述有相同的真假值，則稱此兩敘述為同義或等價。以〝$\equiv$〞表示。

命題

當兩個敘述用「**若** p，**則** q」的方式連接在一起，那我們就稱之為命題，其中的敘述 p 被稱之為「前提」，而敘述 q 被稱之為「結論」。
在符號的使用上，我們會這樣書寫：命題「若 p 則 q」以「$p\to q$」表示。
舉例來說：「**若**學期成績不到 60 分，**則**無法得到學分」、「**若** $x=2$，**則** $x^2=4$」等都是命題。

當然，命題也是要能判斷正確與錯誤的，舉例來說：「$x=2\to x^2=4$」是一個正確的命題，而「$x^2=4\to x=2$」為一個錯誤的命題(因為 $x^2=4$ 應推出 $x=2$ 或 -2)。

在此有一個特別的命題要請同學猜猜看是正確還是錯誤的？

「$1+1=3\to$地球的質量比太陽大」

猜到了嗎？這個命題是**正確**的！在前提無法成立的情況之下，結論不管是對的還是錯的，整個命題都是對的。而這樣的情況常常被拿來作為商業上的話術使用，舉例來說：保險業者在賣壽險的時候會說：「我們這個壽險，會在您 101 歲的時候，會贈予您一個 101 萬元的紅包作為祝壽金」，也就是說如果你沒有活到 101 歲，那麼保險公司根本不必去擔心要不要包這個紅包給你，所以他所說的這句話是沒有問題的。

若命題「$p\to q$」為真時，我們稱「p 蘊含 q」，記作「$p\Rightarrow q$」

在「p 蘊含 q」的情況下，我們會稱敘述 p 有充分的條件可以推得敘述 q，此時敘述 p 是敘述 q 的**充分條件**；反過來說，敘述 q 對於敘述 p 來說是一個必要出現的條件，所以會稱敘述 q 是敘述 p 的**必要條件**。

例如：「四邊形 $ABCD$ 為正方形」為「四邊形 $ABCD$ 是菱形」的充分條件，因為「四邊形 $ABCD$ 為正方形」有足夠**充分**的理由推得「四邊形 $ABCD$ 是菱形」；反之「四邊形 $ABCD$ 是菱

形」為「四邊形 $ABCD$ 為正方形」的必要條件，因為在「四邊形 $ABCD$ 為正方形」之前，「四邊形 $ABCD$ 是菱形」是**必須要**先成立的。

此外，在某些形況下，我們會發現敘述 p 與敘述 q 可以互相推得，例如，敘述 p 為：「三角形 ABC 的三內角相等」與敘述 q：「三角形 ABC 的三邊等長」，我們發現敘述 p 與敘述 q 是可以互相推得的，在這樣的情況下敘述 p 暨是敘述 q 的充分條件，也是敘述 q 的必要條件，這個時候我們會稱敘述 p 與敘述 q 互為**充分且必要條件(簡稱：充要條件)**，並以「$p \leftrightarrow q$」表示，讀做「p **若且唯若** q」，其英文的寫法為「p iff q」，其中的 iff 就是 *if and only if* 的簡寫。

命題的種類：

假設**原命題**為「若 p 則 q」，那麼其**否定命題**就是「若非 p 則非 q」；其**逆命題**為「若 q 則 p」；**否逆命題**為「若非 q 則非 p」

我們舉個例子來說：

原命題：「若兩個三角形面積相等則此兩個三角形全等」。

命題的種類	簡　記	敘述本文	真假值
原命題	$p \to q$	若兩個三角形面積相等則此兩個三角形全等	F
否定命題	$\neg p \to \neg q$	若兩個三角形面積不相等則此兩個三角形不全等	T
逆命題	$q \to p$	若兩個三角形全等則此兩個三角形面積相等	T
否逆命題	$\neg q \to \neg p$	若兩個三角形不全等則此兩個三角形面積不相等	F

在此我們會發現原命題與否逆命題等價；否定命題與逆命題等價，也就是說：

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p\ ;$$

$$\neg p \to \neg q \equiv q \to p$$

所以我們在第一冊第一章中，欲證明「若某個整數的平方是偶數，則該整數也是偶數」，就是利用其否逆命題：「若某個整數不是偶數，則該整數的平方就不是偶數」來完成證明，這樣的證明方法就是**反證法**。

練習題：

1. 設 x,y,z 為實數，則敘述「$|x-y|+|y-z|+|z-x|=0$」之否定敘述為下列何者？

(A) x, y, z 互異 (B) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq 0$ (C) $x\neq y$ 或 $y\neq z$ 或 $z\neq x$
(D) $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$ (E) $x\neq y$ 且 $y\neq z$ 且 $z\neq x$。

[BC]

2. 設 x,y,z 為實數，請判定下列敘述何者為正確？
(A)若 $x^2=9$ 則 $x=-3$ (B)若 $x^2<-1$ 則 $5>6$ (C)，若 $x<5$ 且 $x>5$，則 $x^2+1<0$
(D)若 $x<-1$ 且 $x>4$，則 $|x|>1$ (E)若 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ 則 $x=y=z$。

[BCDE]

3. A,B,C,D 全表敘述已知 $\sim A\Leftrightarrow(\sim B\wedge C)$，$\sim D\Leftrightarrow E$，$\sim B\Leftrightarrow D$，全為真，則 E 為 A 的________條件

[充分]

4. 已知 a,b 為實數，則 $a=b=0$ 是 $a^2-ab+b^2=0$ 的__________條件；

$|a|>|b|$ 是 $a>b$ 且 $a>-b$ 的__________條件。

[充分且必要；必要]

5. 設有紅球 x 個，白球 y 個，綠球 z 個，共計 10 個具有下列三事實：
(1)任取 6 球，其中至少含有一綠球。
(2)任取 9 球，其中紅球，白球，綠球至少各一個。
(3)任取 3 球，若不含有一綠球則必含白球，但不限定必含紅球
則$(x, y, z)=$________________。

[(235)]

6. 已知命題「若 $x-2y=8$，則 $2x+y\neq 1$」為錯的，求 $x^3+y^3=$？

[-19]

7. (1)試證：設 n 為整數，若 n^2 為 3 的倍數，則 n 為 3 的倍數。

(2)試證：$\sqrt{3}$ 為無理數。

以上就是高一寒假額外閱讀的內容，希望同學在閱讀之後能有所收穫，對於往後的數學學習有一定程度的幫助！祝大家寒假愉快！