國立台灣師大附中 101 學年度第一學期高二科學班第一次期中考 p1

範圍:第四冊 1-1~第四冊 2-3 與初中數學競賽教程第 11、26、30、31 講 101.10.09.

一、 選擇題 :每題 5 分,共計 20 分

( ) 1. 已知 $\overrightarrow{a}=(2,4,8)$, $\overrightarrow{b}=(3,-9,27)$, $\overrightarrow{c}=(5,25,125)$為空間中三向量,且此三向量所決定的平行六面體之體積為(A)5400 (B)3600 (C)2400 (D)1600 (E) 1200。【單選】

( ) 2. 設二歪斜直線 $L_1:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$及 $L_2:\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$,求 L_1與 L_2的最短距離? (A) $3\sqrt{30}$ (B) $4\sqrt{30}$ (C) $5\sqrt{30}$ (D) $6\sqrt{30}$ (E) $\sqrt{30}$ 。【單選】

( ) 3. 已知ΔABC之三高為$2,3,4$,則此ΔABC面積最接近下列哪個正整數?【單選】
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9。**【初中競賽數學試題 11 講】**

( ) 4. 空間中三平面:$\begin{cases}E_1: x+2y+z=3\\ E_2: 2x+5y-2z=5\\ E_3: x+4y-7z=a\end{cases}$,請問下列哪些選項是正確的?【多選,5,3,1,0 分】

(A) $a=5$時,三平面恰交於一點(B) $a=4$時,$E_1 // E_2$ 且E_3分別與E_1,E_2各交於一線,且此兩線平行 (C) $a=3$時,$E_1 // E_2 // E_3$ (D) $a=2$時,此三平面兩兩各交於一直線,但三直線不相交(E) $a=1$ 時, 三平面共線,且此線為:$\dfrac{x-5}{-9}=\dfrac{y+1}{4}=z$ 。

二、填充題:每格 5 分,共計 50 分

1. 空間中,兩點$A(0,0,1),B(1,2,3)$,則(1) $\overline{AB}$ =______(2)直線$\overleftrightarrow{AB}$之對稱比例式為何?______。

2. 空間中,$P(-1,\ 2,\ 3)$, $Q(2,\ 1,\ 1)$, $R(1,\ 0,\ 1)$三點,求(1)通過P,Q,R三點之平面方程式=_
(2) ΔPQR面積=________。

3. 空間中,已知點$A(-2,\ 5,\ 4)$與點$B(1,\ 4,\ -5)$在平面$E: 2x-y+2z+4=0$的兩側,且$\overline{AB}$與平面E交於P點,求$\overline{AP}:\overline{BP}$的比值=_________。

4. 四個半徑為 6 的球體,組成三角堆垛,求此堆垛的高度為何?________。

5. 長方形 ABCD,$\overline{AB}=a$,$\overline{BC}=b$沿對角線$\overline{BD}$折起,使ΔABD與ΔBCD平面夾角為$60°$,求此時 A,C 兩點的距離?_________。(答案以a,b表之)

6. 四邊形 $ABCD$ 中,$\overline{AB}=1,\overline{BC}=2,\overline{CD}=3,\overline{DA}=4$,若此四邊形 ABCD 既為某圓之圓內接四邊形又同時為另一圓之圓外切四邊形,則此四邊形 ABCD 面積=_________。**【初中競賽數學試題 26 講】**

7. 空間中,兩直線$L_1: x=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{2}, L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{6}$之鈍角之角平分線為何?_________。

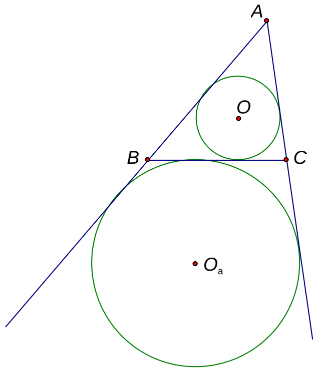
8．空間中，通過兩平面 $E_1: x-2y+2z=7, E_2: 2x+3y+6z=6$ 之交線，又通過點 $A(1,2,3)$ 之平面方程式為何？________。

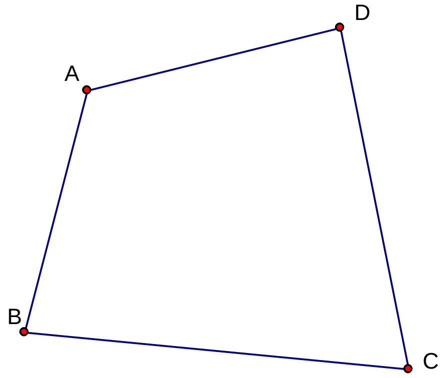
三、計算與證明題： 共計 30 分（請詳細列出計算過程，否則不計分）

1. (1) 如右下圖所示，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c, \overline{DA}=d$, 則試證：四邊形 ABCD 面積為 $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$，其中 $p=\frac{a+b+c+d}{2}$【8 分】

(2)利用(1)說明，當邊長固定時($\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c, \overline{DA}=d$)，以圓內接四邊形面積最大。

【2 分】【初中競賽數學試題 30 講】





2. 已知 ΔABC 中，內切圓 O，$\angle A$ 含的旁切圓為 O_a，如左上圖所示。(1)若圓 O、O_a 半徑分別為 r, r_a，$\overline{BC}=a, s=\frac{a+b+c}{2}$，試證: ΔABC 的面積 $=r_a\cdot(s-a)$。（5 分）

(2)若 $\angle B$、$\angle C$ 含的旁切圓分別為 O_b、O_c，圓 O、O_a、O_b、O_c 的半徑分別為 r、r_a、r_b、r_c，試證：$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$。（5 分）【初中競賽數學試題 31 講】

3. .正八面體邊長為 a ,求(1) 若正八面體內切球與外接球半徑分別為 r 與 R，且兩面角為 θ，則數對（r, R, θ）＝？（答案以 a 表之）（2）正八面體體積＝？（答案以 a 表之）【每小題各 5 分,共 10 分】

【阿宗格言:努力、堅持，並永不放棄！ 】

範圍:第四冊 1-1~第四冊 2-3 與初中數學競賽教程第 11、26、30、31 講 101.10.09.

班級________________ 座號_________姓名_____________________

一、選擇題：（每題 5 分，共計 20 分）

(1)	(2)	(3)	(4)

二、填充題（每格 5 分，共計 50 分）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三、計算與證明題： 共計 30 分（請詳細列出計算過程，否則不計分）

1.

2.

3.

【阿宗格言:努力、堅持，並永不放棄！ 】

國立台灣師大附中 101 學年度第一學期高二科學班第一次期中考 p4

範圍:第四冊 1-1~第四冊 2-3 與初中數學競賽教程第 11、26、30、31 講　　　　101.10.09.

<參考解答>

一、選擇題：（每題 5 分，共計 20 分）

(1)	(2)	(3)	(4)
B	A	C	DE

二、填充題（每格 5 分，共計 50 分）

1.(1)	1.(2)	2.(1)	2.(2)	3.
3	$x=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$	$x-y+2z=3$	$\sqrt{6}$	$\frac{3}{8}$
4.	**5.**	**6.**	**(9)**	**(10)**
$12+4\sqrt{6}$	$\sqrt{\frac{a^4+b^4-a^2b^2}{a^2+b^2}}$	$2\sqrt{6}$	$x=\frac{y}{-23}=\frac{z-1}{-4}$	$7x-7y+16z=41$

三、計算與證明題： 共計 30 分（請詳細列出計算過程，否則不計分）

1.（1）$\begin{cases} \overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D \\ T=\frac{1}{2}absibB+\frac{1}{2}cd\sin D \end{cases}$　　其中，T 為四邊形 ABCD 面積

$$\Rightarrow \begin{cases} ab\cos B-cd\cos D=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\text{........(1)} \\ ab\sin B+cd\sin D=2T\text{..............................(2)} \end{cases},(1)^2+(2)^2$$

$$\Rightarrow 4T^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(B+D)-(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2})^2=(ab+cd)^2-(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2})^2-2abcd(\cos(B+D)+1)$$

$$=\frac{1}{4}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)-4abcd\cos^2\frac{B+D}{2}$$

$$T^2=\frac{1}{16}(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}\Rightarrow T=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$$,QED.

(2) $\because 0\le\cos^2\frac{B+D}{2}\le 1$，當 $B+D=180°$, **即 ABCD 為**圓內接四邊形時，

$\Rightarrow T$ 有最大值$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,QED.

2.(1)略 (2) $\Delta=r\cdot s=r_a\cdot(s-a)=r_b\cdot(s-b)=r_c\cdot(s-c),s=\frac{\Delta}{r}..(1),s-a=\frac{\Delta}{r_a}..(2),s-b=\frac{\Delta}{r_b}..(3),s-c=\frac{\Delta}{r_c}..(4)$

$$\Rightarrow(2)+(3)+(4)=3s-(a+b+c)=s\Rightarrow s=\frac{\Delta}{r}=\frac{\Delta}{r_a}+\frac{\Delta}{r_b}+\frac{\Delta}{r_c}\Rightarrow\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$ Q.E.D

3.(1) $(\frac{\sqrt{6}}{6}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a,\cos^{-1}(-\frac{1}{3}))$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

【阿宗格言:努力、堅持，並永不放棄！ 】